ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

1ο ΘΕΜΑ:

Δίνεται η $f: R \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση

$3.f(x)-2.f(-x)=5x-3$, για κάθε $x \in R$.

i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)+3).\,\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

iii) Αν είναι $(g \circ f)(x)=x^2+1$, για κάθε $x \in R$ να βρείτε τον τύπο της g

2ο ΘΕΜΑ:

Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο [α,β] και οι μιγαδικοί $z=f(\beta)-i\beta^2$ και $w=f(\alpha)+i\alpha^2$ με $|w+\bar{z}|<|\bar{w}-z|$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ Ε (α,β) ώστε $f(\xi)=0$.

3ο ΘΕΜΑ:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} |z-2|+\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}, & x<2 \\ |z+i|+x-\dfrac{5}{4}, & x\geq 2 \end{cases}$$

i) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε ευθεία (ε) της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση.

ii) Αν για τον μιγαδικό w δίνεται ότι $\left|w-\frac{5}{4}-4i\right|=1$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

4ο ΘΕΜΑ:

Αν για την συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $f^3(x)+f(x)+x=4$, για κάθε $x \in R$ να δείξετε ότι

i) Η f είναι συνάρτηση "1-1"

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)=f(1-x)$

iii) Να βρείτε την f^{-1}

iv) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\left[(4-f^{-1}(x)).\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

(i) Δίνεται ότι $3.f(x)-2.f(-x)=5x-3$, για κάθε x Ε R. Θέτουμε όπου x το -x και έχουμε $3.f(-x)-2.f(x)=-5x-3$, όπου λύνουμε το σύστημα

$$(\Sigma)\begin{cases} 3.f(x)-2.\ f(-x)=5x-3 \\ 3.f(-x)-2.\ f(x)=-5x-3 \end{cases}$$ και παίρνουμε $f(x)=x-3$

ii)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)+3)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-3+3)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x.\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$, θέτω $\frac{1}{x}=u$ οπότε

$$\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

iii) Δίνεται $(g\circ f)(x)=x^2+1$

$g(f(x))=x^2+1 \Leftrightarrow g(x-3)=x^2+1 \Leftrightarrow (x-3=\omega)\quad g(\omega)=\omega^2+6\omega+10$

Άρα,
$g(x)=x^2+6x+10$ για κάθε xER

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

$$|w+\bar{z}|<|\bar{w}-z| \Leftrightarrow \left|f(\alpha)+i\alpha^2+f(\beta)+i\beta^2\right|<\left|f(\alpha)-i\alpha^2-f(\beta)+i\beta^2\right| \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow\left|f(\alpha)+f(\beta)+i(\alpha^2+\beta^2)\right|<\left|f(\alpha)-f(\beta)+i(\beta^2-\alpha^2)\right|$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(f(\alpha)+f(\beta))^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}<\sqrt{(f(\alpha)-f(\beta))^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}$$

$\Leftrightarrow f^2(\alpha)+f^2(\beta)+2f(\alpha)f(\beta)+\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2<f^2(\alpha)+f^2(\beta)-2f(\alpha)f(\beta)+\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow 4f(\alpha)f(\beta)<-4\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<-\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο [α, β] άρα υπάρχει ξΕ (α, β) τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

Αφού f συνεχής στο $x_0=2$. Άρα

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ (1)

Είναι

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(|z-2|+\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}\right)=$$

$$=|z-2|+\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{(x-2)(x+2)}$$

$$=|z-2|+\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1}{x+2}=|z-2|+\frac{3}{4}$$. Είναι

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(|z+i|+x-\frac{5}{4}\right)=$$

$$=|z+i|+2-\frac{5}{4}=|z+i|+\frac{3}{4}=f(2)$$ Άρα λόγω της (1) θα πρέπει

$$|z-2|+\frac{3}{4}=|z+i|+\frac{3}{4}\Leftrightarrow|z-2|=|z+i|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z=x+yi)\ |(x-2)+yi|=|x+(y+1)i|\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\Leftrightarrow(\varepsilon):4x+2y-3=0$$

ii) Δίνεται ότι $\left|w-\frac{5}{4}-4i\right|=1$ άρα το σύνολο των εικόνων του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{5}{4},4\right)$ και ακτίνα ρ=1. Η ελάχιστη τιμή του

$$|z-w|=d(K,\varepsilon)-p=\frac{\left|4\cdot\frac{5}{4}+2\cdot 4-3\right|}{\sqrt{4^2+2^2}}-1=\frac{10}{2\sqrt{5}}-1=\sqrt{5}-1$$

Σχόλιο: Η εικόνα του z κινείται στην μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ όπου Α(2,0), Β(0,-1) που είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1=2+0i$, z_2+0-1i βάσει της ισότητας

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

i) $f^3(x)+f(x)+x=4$ άρα $f^3(x)+f(x)+x=4-x$ (1) για κάθε xΕ R.
Τότε για κάθε x_1, x_2 Ε R με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$$\left.\begin{matrix} f^3(x_1)=f^3(x_2) \\ f(x_1)=f(x_2) \end{matrix}\right\}\ (+)\text{ άρα } f^3(x_1)+f(x_1)=$$

$$=f^3(x_2)+f(x_2)\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ 4-x_1=4-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1-1"

ii) $f(e^x)=f(1-x)$

Επειδή η f είναι "1-1" άρα $e^x=1-x\Leftrightarrow e^x+x-1=0$

Προφανής ρίζα x=0 διότι $e^0+0-1=1-1=0$. Η συνάρτηση h με

$h(x)=e^x+x-1$ είναι γνήσια αύξουσα διότι για κάθε x_1,x_2 Ε R με

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-1<x_2-1$ και $e^{x_1}<e^{x_2}$ προσθέτοντας κατά μέλη

έχω $e^{x_1}+x_1-1<e^{x_2}+x_2-1\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι "1-1" οπότε x=0 μοναδική ρίζα.

iii) Η f είναι "1-1", άρα είναι αντιστρέψιμη. Αν θέσουμε $y=f(x)$ τότε η $f^3(x)+f(x)+x=4$ γίνεται $y^3+y+x=4\Leftrightarrow x=4-y^3-y\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y)=4-y^3-y$, y Ε R, (διότι f (R)=R) ή $f^{-1}(x)=-x^3-x+4$, x Ε R.

iv) Είναι $(4-f^{-1}(x))\eta\mu\frac{1}{x}=(4+x^3+x-4)\eta\mu\frac{1}{x}=(x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x}$,

όμως $\left|(x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x^3+x|\Leftrightarrow-|x^3+x|\leq(x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x^3+x|$

το $\lim_{x\to 0}(-|x^3+x|)=\lim_{x\to 0}|x^3+x|=0$, άρα απο το κριτήριο της παρεμβολής και $\lim_{x\to 0}(x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x}=0$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

Γ.ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ