ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

1ο ΘΕΜΑ:

α) Αν για το μιγαδικό z ισχύει για κάθε $e^{|z-i|\cdot x} \geq |z+1|\cdot x+1$,

για κάθε x ∈ R να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β ώστε η Cf να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α) όπου $f(x)=\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x+1}$

γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ Cf, τον άξονα x'x και των ευθειών x=0 και x=2.

2ο ΘΕΜΑ:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R→ R η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)\cdot f(t)\,dt,\ x \in R$

α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

3ο ΘΕΜΑ:

α) Να βρεθεί ο τύπος της θετικής και παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο R αν ισχύουν οι σχέσεις: f'(x). f(α- x)= β >0, για κάθε x ∈ R, f(0)= 1, f'(0)=2

β) Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της συνάρτησης h(x)=f(x)+x και να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης h(x)=0.

γ) ‘Εστω ο μιγαδικός $z(x)= x + e^x . i$, x∈ R. Να εξετάσετε αν το μέτρο του z(x) λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

4ο ΘΕΜΑ:

Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο[α,β], ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε x∈ [α, β] και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, δείξτε ότι f(x)=0, για κάθε x ∈ [α, β].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

α)Δίνεται ότι $e^{|z-i|\cdot x} \geq |z+1|\cdot x+1 \Leftrightarrow e^{|z-i|\cdot x} - |z+1|\cdot x-1 \geq 0$

Θεωρούμε ότι $g(x)= e^{|z-i|\cdot x} - |z+1|\cdot x-1$, άρα ισχύει

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.Άρα, η g εμφανίζει ελάχιστο στο x=0 οπότε απο θεώρημα Fermat ισχύει g'(0)= 0. Είναι

$g'(x)= e^{|z-i|\cdot x}\,|z-i| - |z+1|$ άρα g'(0)=0 $\Leftrightarrow |z-i| = |z+1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (απο z= x+yi) $|x + yi - i| = |x + yi+1| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x+1) + yi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 -2y + 1=x^2 +2x+ 1+ y^2 \Leftrightarrow y$

$\Leftrightarrow y= -x$

β) Η y= -x είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο +00. Άρα, ισχύουν οι ισότητες:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{(x+1)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x^2+x} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$ άρα α= -1. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x+1}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2\beta x-3+x^2+x}{x+1} =$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta+1)x-3}{x+1} = \frac{2\beta+1}{1} = 2\beta+1$ άρα $2\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta= -\frac{1}{2}$

γ) Για α= -1, β= -1/2 η $f(x) = \frac{-x^2-x-3}{x+1} = -\frac{x^2+x+3}{x+1} < 0$, για κάθε x[0,2].Άρα,

$E(\Omega) = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 -\frac{x^2+x+3}{x+1}dx = \int_0^2 \frac{x^2+x+3}{x+1}dx =$

(Σχόλιο: θα μπορούσε να γίνει και διαίρεση)

$= \int_0^2 \frac{x(x+1)+3}{x+1}dx = \int_0^2 \left(x+\frac{3}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+3\ln(x+1)\right]_0^2 =$

$= 2+ 3\ln 3$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α) $f(x)= x^2 + \int_0^x x\cdot f(t)\,dt - \int_0^x t\cdot f(t)\,dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)= x^2 + x\cdot\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t\cdot f(t)$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο R.

β)

$f'(x)= 2x + (x)'\cdot\int_0^x f(t)\,dt + x\cdot\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' - x\cdot f(x)=$

$= 2x + \int_0^x f(t)\,dt + x\cdot f(x) - x\cdot f(x)$

Άρα, $f'(x)= 2x + \int_0^x f(t)\,dt$.

Η f παραγωγίζεται και 2η φορά με

f''(x)= 2+ f(x) ⇔ (προσθέτω την f'(x)) ⇔ f''(x)+ f'(x)=
= 2+ f(x)+f'(x)

θέτω g(x)= f'(x) + f(x). Άρα, ισχύει : g'(x)= 2 + g(x) ⇔
$g'(x)- g(x)= 2 \Leftrightarrow (\cdot e^{-x})$δηλαδή $g'(x)\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot g(x)= 2\cdot e^{-x}$

$\Leftrightarrow (g(x)\cdot e^{-x})' = (-2\cdot e^{-x})' \Leftrightarrow g(x)\cdot e^{-x} = -2\cdot e^{-x}+c \Leftrightarrow$
$g(x)= -2+c\cdot e^x$. Επειδή f(0)= f'(0)= 0 άρα και g(0)= 0 ⇔
$-2+c=0 \Leftrightarrow c= 2$. Οπότε $g(x)= -2+ 2\cdot e^{-x} \Leftrightarrow$
$f'(x)+ f(x)= -2+2\cdot e^x \Leftrightarrow (\cdot e^x)$ δηλαδή
$f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x = -2\cdot e^x +2\cdot e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)\cdot e^x)'=(-2\cdot e^x +2\cdot e^{2x})'$.
Άρα, $f(x)\cdot e^x = -2\cdot e^x + e^{2x}+ c_1 \Leftrightarrow f(x)= -2+e^x +c_1\cdot e^{-x}$
Για x=0: f(0)= 0 ⇔ $c_1= 1$ οπότε $f(x)= e^{x}+e^{-x}-2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

α) Ισχύει ότι f'(x)·f(α -x)= β (I), για κάθε x∈ R, άρα θέτω όπου x το α- x, και έχουμε: f'(α- x)· f(x)= β (II). Εκ των (I), (II) ⇒

f'(x)·f(α- x)- f'(α- x)·f(x)= 0 ⇔ [f(x)·f(α- x)]' =0 ⇔
f(x)·f(α- x)= c (III) (όπου c>0). Διαιρώ κατα μέλη τις (I), (III) οπότε προκύπτει:

$\frac{f'(x)\cdot f(\alpha-x)}{f(x)\cdot f(\alpha-x)} = \frac{\beta}{c} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{c} = \kappa \Leftrightarrow f'(x)= \kappa\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x)= c_1\cdot e^{\kappa\cdot x}$

<u>Προσδιορισμός των</u> C1, κ:

Για x= 0: $f(0)= c_1 \Leftrightarrow 1= c_1$

Για x=0: f'(0)= k·f(0) ⇔ 2= k..Άρα, $f(x) = e^{2x}$

β) Η $h(x)= f(x) +x= e^{2x} +x$.Μονοτονία: $h'(x)= 2e^{2x}+1>0$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο R οπότε:

$h(A)= (\lim_{x\to-\infty}h(x), \lim_{x\to+\infty}h(x))= (-\infty, +\infty) = R$. Παρατηρώ ότι

το μηδέν ∈ h(A) άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in R$: $h(x_0)=0$. Και επειδή η h γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

γ)$z(x)= x+ e^x\cdot i$ άρα $\|z(x)\| = \sqrt{x^2+(e^x)^2} = \sqrt{x^2+e^{2x}}$. Θεωρώ
$g(x)= x^2+ e^{2x}$ άρα $g'(x)= 2x+ 2e^{2x}= 2(x+ e^{2x})= 2h(x)$. Είναι
$g'(x)= 0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow x= x_0$
Οπότε για $x> x_0$ είναι $g'(x) >g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) >0$
για $x< x_0$ είναι $g'(x) <g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) <0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
g'(x)	-		+
g(x)	↘	MIN	↗

Οπότε η g εμφανίζει min στο x_0 με τιμή $g(x_0)$. Άρα, το $\|z(x)\| \geq |z(x_0)|$, για κάθε x∈ R.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

Έστω $F(x)= \int_\alpha^t f(t)dt$, x∈ [α, β]

f συνεχής, άρα η F παραγωγίσιμη με F'(x)= f(x)≥ 0, για κάθε x∈ [α, β] άρα η F γνησίως αύξουσα στο [α, β] άρα για $\alpha \leq x \leq \beta$
είναι

$F(\alpha) \leq F(x) \leq F(\beta) \Leftrightarrow 0 \leq F(x) \leq \int_\alpha^\beta f(t)dt \Leftrightarrow 0 \leq F(x) \leq 0$

άρα F(x)= 0 δηλαδή F σταθερή άρα και F'(x)=0 ⇔ f(x)= 0, για κάθε x∈ [α, β]

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
Γ.ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ