

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1^o ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - \lambda \ln x + (\lambda-2)x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- a) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
- b) Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη ευθεία (ε) στην C_f , να έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης για $x=2$.
- c) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από τα σημεία που η f παρουσιάζει ακρότατα, για την τιμή του λ που βρέθηκε στο (b) ερώτημα

2^o ΘΕΜΑ

Τα στοιχεία ενός δείγματος έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις (ίσους πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα).

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Άθροιστη συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα \bar{v}_i	Σχετική άθροιστη συχνότητα \bar{N}_i
[,)		8			
[,)	6	10		0,09	
[,)					
[,)	14				
Σύνολο		200			

Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι η αθροιστική συχνότητα της 3^{ης} κλάσης ισούται με την συχνότητα της 4^{ης} κλάσης.

ΛΥΣΗΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

a) $f(x) = x^2 - \lambda \ln x + (\lambda-2)x$, $x \in (0, +\infty)$

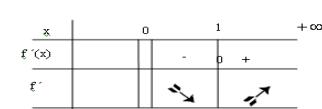
$$f'(x) = 2x - \frac{\lambda}{x} + (\lambda-2) = \frac{2x^2 + (\lambda-2)x - \lambda}{x}$$

$$2x^2 + (\lambda-2)x - \lambda = 0$$

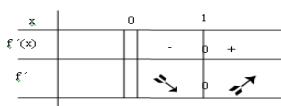
$$\Delta = (\lambda-2)^2 + 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 8\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(\lambda-2) \pm (\lambda+2)}{4} = \begin{cases} \frac{-\lambda+2+\lambda+2}{4} = 1 \\ \frac{-\lambda+2-\lambda-2}{4} = \frac{-\lambda}{2} \end{cases}$$

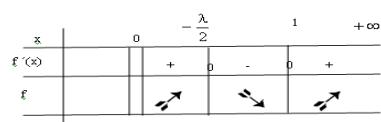
i) Για $-\frac{\lambda}{2} < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$



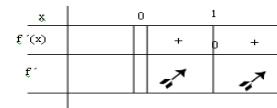
ii) Για $-\frac{\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$



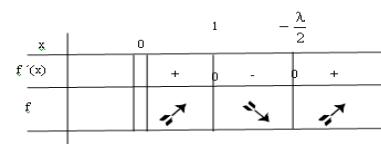
iii) Για $1 > -\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 0$



iv) Για $-\frac{\lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2$



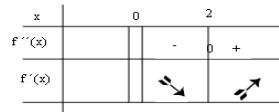
v) Για $-\frac{\lambda}{2} > 1 \Leftrightarrow \lambda < -2$



b) $f'(x) = \frac{2x^2 + (\lambda-2)x - \lambda}{x}$: συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $(x, f(x))$.

$$f''(x) = \frac{[4x + (\lambda-2)] \cdot x - (2x^2 + (\lambda-2)x - \lambda)}{x^2} = \frac{4x^2 + (\lambda-2)x - 2x^2 - (\lambda-2)x + \lambda}{x^2} = \frac{2x^2 + \lambda}{x^2}$$

$$f''(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 4 + \lambda}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -8 \quad \text{άρα} \quad f''(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$



Πράγματι για $x=2$ η $f'(x)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της,

$$f'(2) = \frac{8 - 20 + 8}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

γ) Για $\lambda = -8 < -2$ η f παρουσιάζει ακρότατα για $x=1$ το $f(1) = 1 + 8 \cdot 0 - 10 = -9$ A(1, -9) και για $x = -\frac{8}{2} = 4$ το

$$f(4) = 16 + 8\ln 4 - 40 = -24 + 8\ln 4 \quad \text{B}(4, -24 + 8\ln 4)$$

Έστω $y = ax + b$ η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα A(1, -9) και B(4, -24 + 8\ln 4) τότε

$$\begin{cases} -9 = \alpha \cdot 1 + \beta \\ -24 + 8\ln 4 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{-12 - 8\ln 4}{3} \\ \alpha = \frac{-15 + 8\ln 4}{3} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$y = \frac{-15 + 8\ln 4}{3} \cdot x - \frac{12 + 8\ln 4}{3}$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Άθροιστη συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα \bar{v}_i	Σχετική άθροιστη συχνότητα \bar{N}_i
[,)		8		0,04	0,04
[,)	6	10		0,05	0,09
[,)		82	100	0,41	0,50
[,)	14	100	200	0,50	1
Σύνολο		200			

a) $v_1 = N_1 = 8$

b) $N_2 = N_1 + v_2 = 8 + 10 = 18$

γ) $F_2 = \frac{N_2}{N} \Leftrightarrow N = \frac{N_2}{F_2} = \frac{18}{0,09} = 200$

δ) $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 200 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 200 - 18 = 182$

$\Leftrightarrow v_3 + v_4 = 182$ ακόμη ισχύει ότι $N_3 = v_4$ άρα

$v_1 + v_2 + v_3 = v_4 \Leftrightarrow 8 + 10 + v_3 = v_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 + 182 - v_4 = v_4 \Leftrightarrow 200 = 2v_4 \Leftrightarrow v_4 = 100$

ε) $v_1 + v_2 + v_3 = N_3$ άρα $v_3 = 100 - 18 = 82$

ζ) $F_1 = f_1 = \frac{8}{200} = 0,04$

η) $f_2 = \frac{10}{200} = 0,05$ $f_3 = \frac{82}{200} = 0,41$ $f_4 = \frac{100}{200} = 0,5$

θ) Έστω x το αριστερό άκρο της 1^{ης} κλάσης και c το πλάτος της κλάσης, τότε οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα παίρνουν τη μορφή

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i
[x, x+c)	
[x+c, x+2c)	6
[x+2c, x+3c)	
[x+3c, x+4c)	14

$$\frac{x + c + x + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 2x + 3c = 12 \quad (1)$$

$$\frac{x + 3c + x + 4c}{2} = 14 \Leftrightarrow 2x + 7c = 28 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $c=4$ και $x=0$, οπότε

$x_1 = 6 - 4 = 2$

$x_3 = 6 + 4 = 10$

Η πρώτη κλάση είναι [0, 4] η δεύτερη [4, 8], η τρίτη [8, 12] και η τέταρτη [12, 16].

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ