ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Α. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_v$, οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής x. Να αποδείξετε ότι $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \overline{x}^2$

Β. Οι ηλικίες t_i, i=1,....... ,v των v μαθητών έχουν Cv_x=15% ενώ πριν ένα χρόνο είχαν CV_y=16%.
(α) να βρείτε την μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση S.
(β) Μετά από πόσα χρόνια το δείγμα θα είναι ομοιογενές;
(γ) Αν $\sum_{i=1}^{v} t_i^2 = 26176$ να δείξετε ότι v=100.

2ο ΘΕΜΑ

Αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+ \ldots +(x-x_v)^2}{v}$ έχει ελάχιστο το g(99) =9 να αποδειχθεί ότι το δείγμα των αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_v$ είναι ομοιογενές.

3ο ΘΕΜΑ

Δίνονται Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε: $A,B \neq \varnothing$ και $A,B \neq \Omega$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0} \frac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2+[P(A)+P(B)]\,x}$

4ο ΘΕΜΑ

Αν για τα ενδεχόμενα ΑΒ ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: P(A)>0,6 και P(B)=0,4
Α)Να εξετάσετε αν τα Α,Β είναι ασυμβίβαστα.
Β)Αν $\rho\in R$ ρίζα της εξίσωσης
$x^2+2P(A\cap B)\cdot x+P(A)\cdot P(B) =0$

να δειχθεί ότι $0>\rho \geq -0,4$

Γ)Να δειχθεί ότι $0,2<P(A-B)$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Α.Ισχύει ότι:

$$S^2=\left(\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right) \Leftrightarrow S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v^2} \Leftrightarrow$$

$$S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{v} t_i}{v}\right)^2 \Leftrightarrow S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \overline{x}^2$$

Β. (α) Η σημερινή μέση ηλικία των μαθητών είναι $\overline{x}$ ενώ πριν ένα χρόνο ήταν $\overline{y} = \overline{x} -1$ **και** η τυπική απόκλιση παραμένει αμετάβλητη .
Έχουμε λοιπόν: $CV_X = \frac{S}{\overline{x}} \Leftrightarrow \frac{S}{\overline{x}} = 0,15$

$$CV_y = \frac{S}{\overline{y}} \Leftrightarrow \frac{S}{\overline{x}-1} = 0,16$$

Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε:
$\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}} = \frac{0,15}{0,16} \Leftrightarrow 15\overline{x} = 16\overline{x} -16 \Leftrightarrow \overline{x} =16$ και

$\frac{S}{16} =0,15 \Leftrightarrow S =2,4$

(β) Έστω ότι μετά από c χρόνια (c>0) το δείγμα θα γίνει ομοιογενές δηλαδή $CV\leq 0,1$ τότε η μέση ηλικία των μαθητών θα είναι $\overline{x}+c$ ενώ αμετάβλητη θα παραμείνει η τυπική απόκλιση S. Οπότε:

$$CV\leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{S}{\overline{x}+c} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2,4}{16+c} \leq 0,1 \Leftrightarrow 2,4 \leq 1,6+0,1c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,8 \leq 0,1c \Leftrightarrow c\geq 8$$

Άρα το δείγμα θα γίνει για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 8 χρόνια.
(γ) Ισχύει ότι: $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_1^2 - \overline{x}^2 \Leftrightarrow 2,4^2 = \frac{1}{v}\, 26176 - 16^2$

$$\Leftrightarrow 261,76 = \frac{1}{v}\, 26176 \Leftrightarrow v=100$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για x_o=99 άρα $g'(99) = 0$.
Δηλαδή:

$$g'(x) = \frac{2(x-x_1)(x-x_1)'+2(x-x_2)(x-x_2)'+\ldots+2(x-x_v)(x-x_v)'}{v}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 2\frac{x-x_1+x-x_2+\ldots+x-x_v}{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 2\frac{v\cdot x-(x_1+x_2+\ldots+x_v)}{v} \Leftrightarrow g'(x) = 2(x-\overline{x})$$ άρα

$$g'(99) = 0 \Leftrightarrow 2(99-\overline{x}) =0 \Leftrightarrow \overline{x} = 99$$

Επίσης για $x=\overline{x}$ έχω

$$g(\overline{x}) = \frac{(\overline{x}-x_1)^2+(\overline{x}-x_2)^2+\ldots+(\overline{x}-x_v)^2}{v} = S^2$$

Επομένως S^2=g(99)=9 ⇔ $CV=\frac{S}{\overline{x}} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33} < \frac{1}{10}$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2+[P(A)+P(B)]\,x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,[P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)]}{x\cdot [x + P(A)+P(B)]} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(A\cup B) + P(A\cap B)}{x + P(A)+P(B)} = \frac{P(A\cup B) + P(A\cap B)}{P(A)+P(B)} =$$

$$\frac{P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B)}{P(A) + P(B)} = 1$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Α) P(A)>0,6 και P(B)=0,4. Αν τα Α,Β ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε $P(A\cup B) = P(A)+P(B) > 0,6+0,4=1$ άτοπο αφού

$0\leq P(A\cup B) \leq 1$

Β) $\rho\in R$ ρίζα της $x^2+2P(A\cap B)X + P(A)\cdot P(B) = 0$ (1)
$\Delta=[2P(A\cap B)]^2- 4\cdot 1\cdot P(A)\cdot P(B) =$

$= 4[P(A\cap B)]^2- 4P(A)P(B) = 4[[P(A\cap B)]^2 - P(A)\,P(B)]$

$A\cap B \subseteq A$ και $A\cap B \subseteq B$ άρα

$$\left.\begin{matrix} P(A\cap B) \leq P(A) \\ P(A\cap B) \leq P(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow [P(A\cap B)]^2 \leq P(A)\cdot P(B)$$

Άρα $\Delta \leq 0$ και επειδή γνωρίζουμε ότι η (1) έχει ρίζα ρ, άρα $\Delta=0 \Leftrightarrow [P(A\cap B)]^2=P(A)\cdot P(B)$ και $\rho= - \frac{2P(A\cap B)}{2\cdot 1} = -P(A\cap B)$

$0<P(A\cap B) \leq 0,4 \Leftrightarrow 0> - P(A\cap B) \geq -0,4$

Γ) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$
$0<P(A\cap B) \leq 0,4$, $0> - P(A\cap B) \geq - 0,4$

$P(A) > P(A-B) \geq P(A) - 0,4 >0,6 -0,4= 0,2$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**