ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Έστω Ω{0,1,2,3,4} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και οι πιθανότητες P(λ)=αλ+β, $\lambda\in\Omega$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\lambda x^2+4x+\sqrt{2}$ και το ενδεχόμενο

A={ $\lambda\in\Omega$ / «η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης f δεν είναι παράλληλη στον xx' } με $P(A)=\frac{1}{4}$

α) Να βρεθούν τα στοιχεία του συνόλου A.
β) Να βρείτε τα α,β.
γ) Έστω το ενδεχόμενο B={ $\lambda\in\Omega$ / η διάμεσος των παρατηρήσεων:0, 1, λ, λ+1, 2λ είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή αυτών}.
(ι) Να βρεθούν τα στοιχεία του συνόλου B.
(ιι) Να βρεθούν οι πιθανότητες P(B), $P(A\cup B')$, P(A-B).

2ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A)<P(B). Αν οι πιθανότητες P(A), P(B), $P(A\cap B)$ είναι στοιχεία του συνόλου

$$K=\left\{\frac{\ln 3}{3},\ \ln\frac{1}{2},\ \frac{1}{e},\ \frac{\ln 2}{2}\right\}$$

(ι) Να βρείτε τις P(A), P(B), $P(A\cap B)$.
(ιι) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα ή κανένα.

3ο ΘΕΜΑ

Έστω $t_1,\ldots,t_\nu$ παρατηρήσεις με $\bar{x}=30$ και S=5

α) να βρεθεί ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων
β) αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2 μονάδες πόσο θα μεταβληθεί ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων;
Δίνεται

$$S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu}\right\}$$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Η εφαπτομένη της f δεν θα είναι παράλληλη στον xx' σε οποιοδήποτε σημείο της αν $f'(x)\neq 0$.
Δηλαδή: $f'(x)=x^2-2\lambda x+4$

$$x^2-2\lambda x+4\neq 0 \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-16<0 \Leftrightarrow \lambda^2<4 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2<\lambda<2$ και επειδή $\lambda\in\Omega$ θα είναι λ=0 ή λ=1.
Άρα: A={0, 1}.
β) Ισχύει ότι:
P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=1 (1)

Ξέρουμε ότι P(λ)=αλ+β, $\lambda\in\Omega$ άρα
P(0)=β
P(1)=α+β
P(2)=2α+β
P(3)=3α+β
P(4)=4α+β
Οπότε:(1) ⇔ 10α+5β=1
Επίσης έχουμε: $P(A)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(0)+P(1)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha+2\beta=\frac{1}{4}$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} 10\alpha+5\beta=1 \\ \alpha+2\beta=\frac{1}{4} \end{cases}$

και βρίσκουμε ότι α=1/20 και β=1/10.
γ) (ι) Βρίσκουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων: 0, 1, λ, λ+1, 2λ

$$\bar{x}=\frac{0+1+\lambda+\lambda+1+2\lambda}{5}=\frac{4\lambda+2}{5}$$

Παρατηρούμε ότι λ>λ+1 για κάθε $\lambda\in\Omega$ και $\lambda+1\leq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda\geq 1$.
Επομένως αν $\lambda\geq 1$ οι παρατηρήσεις όπως δίνονται είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά, οπότε: δ=λ και πρέπει $\delta>\bar{x} \Leftrightarrow \lambda>\frac{4\lambda+2}{5} \Leftrightarrow 5\lambda>4\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda>2,\ \lambda\in\Omega$
άρα λ=3 ή λ=4.
Αν λ=0 τότε οι παρατηρήσεις είναι: 0, 1, 0, 1, 0 και κατά αύξουσα σειρά 0, 0, 0, 1, 1
Άρα δ=0 και $\bar{x}=\frac{2}{5}$. Όμως $\delta<\bar{x}$, αδύνατο.
Επομένως πρέπει $\lambda\neq 0$.
Συνεπώς B={3,4}.
(ιι) Δίνεται ότι P(λ)=αλ+β και από το ερώτημα (β) έχουμε: $P(\lambda)=\frac{1}{20}\cdot\lambda+\frac{1}{10},\ \lambda\in\Omega$

άρα $P(B)=P(3)+P(4)=\frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{4}{20}+\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$

$B'=\{0,1,2\}$ και A={0,1} άρα: $A\cup B'=\{0,1,2\}=B'$ οπότε:

$$P(A\cup B')=P(B')=1-P(B)=\frac{9}{20}$$

και A-B=A (αφού $A\cap B=\varnothing$ άρα: $P(A-B)=P(A)=\frac{1}{4}$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

f′(x)>0 ⇔ 1-lnx>0 ⇔ lnx<1 ⇔ x<e.
f′(x)<0 ⇔ 1-lnx<0 ⇔ lnx>1 ⇔ x>e.
Δηλαδή

x	0		e		+∞
f′(x)		+		−	
f(x)		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα για $x\in(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα για $x\in[e,+\infty)$ ενώ για x=e παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

β) (ι) Αφού P(A)<P(B) και $A\cap B\subseteq A$ τότε:
$P(A\cap B)<P(A)<P(B)$
Επίσης $\ln\frac{1}{2}<0$ οπότε δεν αντιστοιχεί σε τιμή πιθανότητας.
Ακόμα το 1/e είναι η μέγιστη τιμή της f δηλαδή $f(x)\leq\frac{1}{e}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και
$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 2\ln 3>3\ln 2 \Leftrightarrow 9>8$ που ισχύει.
Επομένως $P(A\cap B)=\frac{\ln 2}{2}$ $P(A)=\frac{\ln 3}{3}$ $P(B)=\frac{1}{e}$
(ιι) Ζητάμε δηλαδή την πιθανότητα:

$$P\left[\left[(A-B)\cup(B-A)\right]'\right]=1-P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=$$

$$=1-P(A)-P(B)+2P(A\cap B)=1-\frac{\ln 3}{3}-\frac{1}{e}+\frac{2\ln 2}{2}=$$

$$=\frac{6e-2e\ln 3-6+6e\ln 2}{6e}=\frac{3e-e\ln 3-3+3e\ln 2}{3e}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α)
$$S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} ti^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu^2}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow 25=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}-30^2 \Leftrightarrow 925=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}$$

β) Έστω yi= ti+2 τότε $\bar{y}=30+2=32$ και $S_y=S_x=5$ οπότε

$$S_y^2=\frac{\sum yi^2}{\nu}-\left(\frac{\sum yi}{\nu}\right)^2 \Rightarrow 25=\frac{\sum yi^2}{\nu}-32^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25+1024=\frac{\sum yi^2}{\nu} \Rightarrow 1049=\frac{\sum yi^2}{\nu}$$

Άρα ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων θα αυξηθεί κατά 1049 - 925=124 μονάδες.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**