ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Έστω P(x) ένα πολυώνυμο το οποίο έχει ρίζα το ρ με πολλαπλότητα κ. Δείξτε ότι το P'(x) έχει το ρ ρίζα με πολλαπλότητα κ - 1

2ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ (1). Ακόμα θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^{x-1} + \beta^{\ln x}$, x>0. Αν για κάθε x>0 ισχύει $f(x) \geq 2$, να βρεθούν τα α και β.

3ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α) = f(β) = 0. Αποδείξτε για κάθε λ ∈ R, υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (α, β) : f '(ξ) = λ · f(ξ) (1)

4ο ΘΕΜΑ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \longrightarrow R$ με f ' να είναι 1-1. Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της C_f έχει ένα και μοναδικό κοινό σημείο με την C_f.

5ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

6ο ΘΕΜΑ

Έστω οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f,g,h με f(1)=g(1)=0. Επίσης για κάθε $x \in R$ ισχύει $f'(x) = g(x) \cdot h(x)$ και $g'(x) = -f(x) \cdot h(x)$

Να δειχθεί ότι για κάθε x∈ R ισχύει f(x) = g(x) = 0

7ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$, λ > 1

i) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
ii) Να δείξετε ότι για κάθε x ≥ 0 ισχύει $e^{2010x} \geq 1 + (\frac{x}{2010})^2$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Επειδή το ρ είναι ρίζα του P(x) πολλαπλότητας κ, το P(x) γράφεται $P(x) = (x - \rho)^{\kappa} \cdot Q(x)$ με Q(ρ) ≠ 0
Είναι $P'(x) = \kappa(x - \rho)^{\kappa - 1} \cdot Q(x) + (x - \rho)^{\kappa} \cdot Q'(x)$

$$= (x - \rho)^{\kappa - 1} \cdot [\kappa \cdot Q(x) + (x - \rho) \cdot Q'(x)] = (x - \rho)^{\kappa - 1} \cdot \Pi(x)$$

όπου Π(x) = κQ(x) + (x - ρ) · Q'(x)
με Π(ρ) = κ · Q(ρ) ≠ 0
και έτσι $P'(x) = (x - \rho)^{\kappa - 1} \cdot \Pi(x)$ με Π(ρ) ≠ 0. Συνεπώς το ρ είναι ρίζα του P'(x) πολλαπλότητας κ - 1.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Παρατηρούμε ότι $f(1) = \alpha^{1-1} + \beta^{\ln 1} = \alpha^0 + \beta^0 = 1+1 = 2$
Οπότε για κάθε x > 0 ισχύει f(x) ≥ f(1) = 2, δηλαδή το 2 είναι ελάχιστο. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$f'(x) = \alpha^{x-1} \cdot \ln\alpha \cdot (x-1)' + \beta^{\ln x} \cdot \ln\beta \, (\ln x)'$$

$$= \alpha^{x-1} \cdot \ln\alpha + \frac{1}{x}\beta^{\ln x} \cdot \ln\beta \, , \; x > 0$$

Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο $x_0 = 1$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με Θ. Fermat είναι f '(1) = 0 ⇔
$\alpha^0 \ln\alpha + \beta^0 \ln\beta = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + \ln\beta = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) = 0$
⇔ α · β = 1 (2)
Από (1) (2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ \alpha \cdot \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 & \text{ή} \quad \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} & \quad\;\; \beta = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έχουμε από την (1) ισοδύναμα
$f'(\xi) - \lambda f(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda\xi} \cdot f'(\xi) - \lambda \cdot e^{-\lambda\xi} \cdot f(\xi) = 0$
$\Leftrightarrow (e^{-\lambda\xi} \cdot f(\xi))' = 0$
Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = e^{-\lambda x} \cdot f(x)$, x ∈ [α, β]
Η g είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g(\alpha) = e^{-\lambda\alpha} \cdot f(\alpha) = 0$, $g(\beta) = e^{-\lambda\beta} \cdot f(\beta) = 0$
Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [α, β] οπότε υπάρχει ξ ∈ (α, β) : g'(ξ) = 0. Έχουμε $g'(x) = (e^{-\lambda x})' \cdot f(x) + e^{-\lambda x} \cdot f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \cdot f(x) + e^{-\lambda x} \cdot f'(x)$
άρα $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda\xi} \cdot (-\lambda f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow$
$-\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω (ε) η τυχαία εφαπτομένη της C_f στο M $(x_0, f(x_0))$ τότε η εξίσωση της (ε) είναι
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ με $\lambda_\varepsilon = f'(x_0)$
Ας υποθέσουμε ότι η (ε) τέμνει την C_f και σε ένα άλλο κοινό σημείο $N(x_1, y_1)$ με $x_1 \neq x_0$
Έστω ότι είναι $x_1 > x_0$, τότε $\lambda_\varepsilon = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$
Στο $[x_0, x_1]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (x_0, x_1) ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lambda_\varepsilon = f'(x_0) \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(x_0)$$

$\overset{f'\ 1-1}{\Longrightarrow} \xi = x_0$ άτοπο διότι $x_0 < \xi < x_1$
Όμοια αν θεωρήσουμε ότι $x_1 < x_0$

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Είναι $A=(0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(\ln x)' \cdot 2\sqrt{x} - \ln x \cdot \left(2\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - \ln x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2 - \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}, \quad x>0$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του αριθμητή
- Για 0<x<1 είναι x-1<0 και lnx<0 οπότε 2(x-1)+lnx<0 $\Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για x>1 είναι 2(x-1) >0 και lnx >0 οπότε 2(x-1)+lnx>0 $\Leftrightarrow f'(x) > 0$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ 6ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f^2(x) + g^2(x)$, x∈ R
είναι $\varphi'(x) = 2f(x) f'(x) + 2g(x) g'(x)$
$= 2f(x) \cdot g(x) h(x) + 2g(x) (-f(x) \cdot h(x)) = 0$, x∈ R
άρα φ(x) = c.
Για x = 1 $\varphi(1) = f^2(1) + g^2(1) \Leftrightarrow \varphi(1) = 0$ άρα c = 0
οπότε για κάθε x∈ R
$f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0$

ΛΥΣΗ 7ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i) Είναι A = R , η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}\right)' = \frac{(e^{\lambda x})'(x^2 + \lambda^2) - e^{\lambda x}(x^2 + \lambda^2)'}{(x^2 + \lambda^2)^2}$$

$$= \frac{\lambda e^{\lambda x} \cdot (x^2 + \lambda^2) - e^{\lambda x} \cdot 2x}{(x^2 + \lambda^2)^2} = \frac{e^{\lambda x} \cdot (\lambda x^2 - 2x + \lambda^3)}{(x^2 + \lambda^2)^2}$$

Το πρόσημο ως παράγωγος εξάρταται αποκλειστικά από το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2x + \lambda^3$.
$\Delta = 4 - 4\lambda^4 = 4(1 - \lambda^4) < 0$ διότι λ > 1 άρα για κάθε x∈ R είναι $\lambda x^2 - 2x + \lambda^3 > 0$
οπότε f '(x) > 0 άρα f ↗ στο R
ii) f ↗ στο R, άρα x ≥ 0 ⇒ f(x) ≥ f(0)

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow \frac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2} \geq \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow e^{\lambda x} \geq 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2$$

και για λ=2010 προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**