ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $2f(x) = -xf'(x)\cdot \ln x,\ x>1 \quad (1)$.

Αν f(e)=1, να βρεθεί ο τύπος της f(x).

2ο ΘΕΜΑ

Έστω $\alpha\in R$, να δειχθεί ότι για κάθε x>0, ισχύει $\alpha\cdot x \le e^{\alpha-1}+\ln x^x \quad (1)$

3ο ΘΕΜΑ

Έστω α>0, με $\alpha\ge e$. Να δειχθεί ότι για κάθε x>α ισχύει $\alpha^x > x^\alpha$

4ο ΘΕΜΑ

Έστω Δ διάστημα και f μια μη σταθερή συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι αν $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε δεν μπορεί το $K(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής.

5ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση F με $F(x)=\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$ να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της F.
β) Το πρόσημο της F.
γ) Η κυρτότητα της F.
δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο $x_0=1$.
ε) Εάν Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_F του άξονα $x'x$ και της ευθείας x=2, να αποδειχθεί ότι 2E<e.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η (1) για $x\in(1,+\infty)$ γράφεται ισοδύναμα

$\frac{2}{x}f(x) = -f'(x)\cdot \ln x \Leftrightarrow 2(\ln x)'\cdot f(x) = -f'(x)\ln x\cdot$

$\Leftrightarrow 2\ln x\cdot (\ln x)'\cdot f(x) = -f'(x)\cdot (\ln x)^2\cdot$

$\Leftrightarrow (\ln^2 x)'\cdot f(x)+f'(x)\ln^2 x=0 \Leftrightarrow (f(x)\cdot \ln^2 x)'=0$

$\Leftrightarrow f(x)\cdot \ln^2 x = c$

Για x=e: $f(e)\cdot \ln^2 e = c \Leftrightarrow 1\cdot 1 = c \Leftrightarrow c=1$

Άρα $f(x)\cdot \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\ln^2 x},\ x>1$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Από την (1) έχουμε: $\alpha x - e^{\alpha-1} - \ln x^x \le 0$
Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$f(x) = \alpha x - e^{\alpha-1} - \ln x^x = \alpha x - e^{\alpha-1} - x\cdot \ln x,\ x>0$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με
$f'(x) = \alpha - \ln x - 1,\ x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=\ln x \Leftrightarrow x=e^{\alpha-1}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \alpha-1>\ln x \Leftrightarrow 0<x<e^{\alpha-1}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e^{\alpha-1}$ άρα

x	0		$e^{\alpha-1}$		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

Συνεπώς η f παρουσιάζει μέγιστο με

$f(e^{\alpha-1}) = \alpha\cdot e^{\alpha-1} - \ln(e^{\alpha-1})^{\alpha-1} - e^{\alpha-1} =$

$=(\alpha-1)e^{\alpha-1} - e^{\alpha-1}(\alpha-1)=0$

Άρα για κάθε x>0 ισχύει

$f(x)\le f(e^{\alpha-1}) \Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow \alpha x \le e^{\alpha-1}+\ln x^x$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Επειδή $x>\alpha\ge e$ θα είναι $\alpha^x > x^\alpha>0$ ισοδύναμα:
$\ln\alpha^x > \ln x^\alpha \Leftrightarrow x\ln\alpha > \alpha\ln x \Leftrightarrow x\ln\alpha - \alpha\ln x > 0$

Θεωρούμε ....
f με $f(x) = x\ln\alpha - \alpha\ln x,\ x\ge\alpha$
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ με $f'(x)=\ln\alpha - \frac{\alpha}{x},\ x>\alpha$

Είναι $f'(x)=\ln\alpha-\frac{\alpha}{x}>0$ διότι $x>\alpha\ge e$ και έτσι $\ln\alpha\ge 1>\frac{\alpha}{x}$ έχουμε

x	α		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	

είναι f(α)=0 οπότε για κάθε x>α ισχύει f(x) > f(α) =0
$\Leftrightarrow x\ln\alpha - \alpha\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha^x - \ln x^\alpha > 0$

$\Leftrightarrow \ln\alpha^x > \ln x^\alpha \Leftrightarrow \alpha^x > x^\alpha$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Υποθέτουμε ότι $K(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και $f(x_0)$ ακρότατο της συνάρτησης. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ είναι $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$
Το x_0 είναι θέση Σ.Κ. άρα αλλάζει η καμπυλότητα αριστερά και δεξιά του x_0
Έστω ότι αριστερά του x_0 η f είναι κυρτή και δεξιά κοίλη. Τότε η f ' είναι γνήσια άυξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[x_0, x_0+\delta)$.
Οπότε για $x<x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για κάθε $x>x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0)$
Δηλαδή για κάθε $x\in(x_0,\delta)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f↓ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Άρα δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Τα παραπάνω φαίνονται στον πίνακα

x	$x_0-\delta$		x_0		$x_0+\delta$
f ''		+	0	—	
f '		↗ —	0	↘ —	
f		↘		↘	

Επομένως αν $f(x_0)$ τοπικό ακρότατο δεν μπορεί το $K(x_0, f(x_0))$ να είναι και σημείο καμπής

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Έστω $g(t)=e^{\frac{1}{t}}\quad D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\quad 1\in(0,+\infty)$

άρα $x\in(0,+\infty)$ οπότε $D_F=(0,+\infty)$

β) Προφανής ρίζα x=1 διότι $F(1)=\int_1^1 e^{\frac{1}{t}}dt=0$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'=(x)=e^{\frac{1}{x}}>0$ άρα

η F γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε η x = 1 μοναδική ρίζα
Για 0 < x < 1 είναι F(x) < F(1) ⇔ F(x) < 0
Για x > 1 είναι F(x) > F(1) ⇔ F(x) > 0
Συνοπτικά ο πίνακας είναι

x	0		1	
F '		+	0	+
F		↗ —		↗ +

γ) $F''(x)=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}<0$, άρα η C_F στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 1$ είναι
y - F(1) = F '(1)(x - 1) ή y - 0 = e (x - 1) ⇔ y = ex - e
ε)Επειδή η C_F στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$ άρα $F(x)\le ex-e$ (Το "=" ισχύει για x = 1). Η $F(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα $E=\int_1^2 F(x)dx$ οπότε $\int_1^2 F(x)dx < \int_1^2 (ex-e)dx$

$E < \left[e\cdot\frac{x^2}{2} - e\cdot x\right]_1^2 \Leftrightarrow E<\frac{e}{2} \Leftrightarrow 2E<e$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**