ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι :
Ι) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
ΙΙ) Αν μια διάμεσος τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί , τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

2. Αν οι γωνίες $\omega = 100^\circ - x$ και $\varphi = 20^\circ + x$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες τότε το x ισούται με

Α) 40° Β) 45 ° Γ) 50° Δ) 55° Ε) 10 °

3. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ η γωνία Γ είναι διπλάσια της Α τότε η γωνία Β είναι :

Α) 40° Β) 30° Γ) 72° Δ) 36° Ε) 40 °

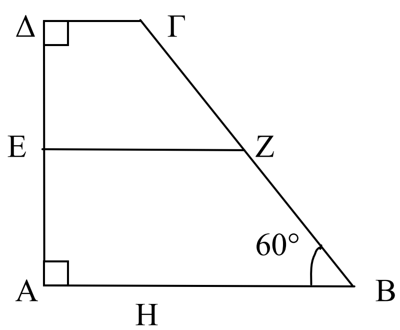
4. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) μα ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	1. Δυο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες
2. Τραπέζιο	2. Οι διαγώνιες είναι ίσες και τέμνονται κάθετα
3. Ρόμβος	3. Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες
4. Τετράγωνο	4. Το άθροισμα των γωνιών του είναι 400°
	5. Οι διαγώνιες είναι ίσες

ΘΕΜΑ 2

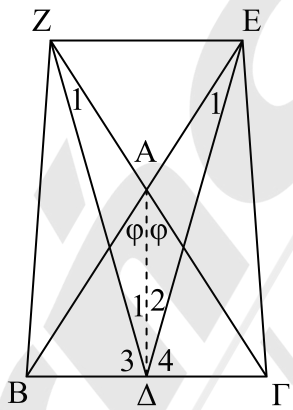
1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$. Αν τα ύψη ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ο να δείξετε ότι :

I. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BO\Gamma}$ είναι ισοσκελές.
II. Η $\widehat{A} = 2\widehat{OB\Gamma} = 2\widehat{O\Gamma B}$.
III. Η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.



2. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $A = \Delta = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Αν $\Gamma\Delta = 2x$ και $B\Gamma = 8x$ η διάμεσος του τραπεζίου ισούται με :
Α. 3x Β. 4x Γ. 5x Δ. 6x Ε. 7x

<u>ΘΕΜΑ 3</u>



Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές τους προς το μέρος της κορυφής Α και πάνω στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα $ΑΕ = ΑΖ$. Αν ΑΔ η διχοτόμος του ΑΒΓ να δειχθεί ότι:

α. Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές

β. Τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΖΓΔ είναι ίσα

γ. Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΔΕΓ είναι ίσα

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{Α} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Δ}$ τέμνει την ΑΒ στο μέσον της Ε. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

I) $ΑΒ = 2ΑΔ$

II) $ΔΕ = 2ΑΖ$ όπου ΑΖ η απόσταση του Α από τη ΓΔ και

III) $\widehat{ΔΑΓ} = 90^\circ$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 109).

2. Ισχύουν οι προτάσεις : δυο οξείες ή αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους μια προς μια παράλληλες (κάθετες) είναι ίσες.
Μια οξεία και μια αμβλεία γωνία που έχουν τις πλευρές τους μια προς μια παράλληλες (κάθετες) είναι παραπληρωματικές .
Αρα $ω = φ \Rightarrow 100^\circ - x = 20^\circ + x \Rightarrow x = 40^\circ$ **<u>Απάντηση</u>** : Α)

3. Το τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = φ$ και $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = φ = 2\widehat{Α}$.Επειδή

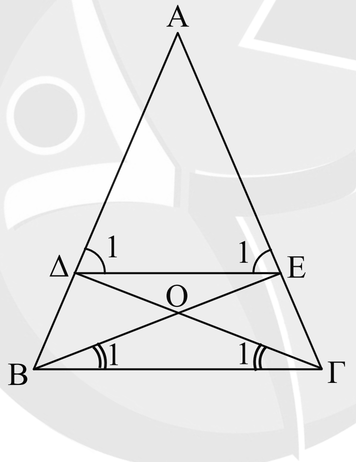
$$\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^\circ \Rightarrow φ + φ + \frac{φ}{2} = 180^\circ \Rightarrow 2φ + \frac{φ}{2} = 180^\circ \Rightarrow 5φ = 360^\circ \Rightarrow φ = 72^\circ$$

<u>Απάντηση</u> : Γ)

4. Απάντηση : $1 \to 5$, $2 \to 1$, $3 \to 3$, $4 \to 2$

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

1.



I. Το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές $\Rightarrow ΑΒ = ΑΓ$ και $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ (1). Τα ορθογώνια $\overset{\Delta}{ΒΕΓ}, \overset{\Delta}{ΓΔΒ}$ έχουν : { ΒΓ κοινή , $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ από (1) } $\Rightarrow \overset{\Delta}{ΒΕΓ} = \overset{\Delta}{ΓΔΒ}$ άρα $\widehat{Β_1} = \widehat{Γ_1} \Leftrightarrow \widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΓΒ}$ δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΒΟΓ}$ είναι ισοσκελές.

II. Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \overset{\hat{B}=\hat{\Gamma}=\varphi}{\Rightarrow} \hat{A}+\varphi+\varphi=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-2\varphi$ (2). Στα ορθογώνια $B\overset{\Delta}{E}\Gamma, \Gamma\overset{\Delta}{\Delta}B$ ισχύει :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma}+\hat{B}_1=90° \\ \hat{B}+\hat{\Gamma}_1=90°\end{array}\right\} \overset{"+"}{\Rightarrow} \hat{B}+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_1=180° \overset{\hat{B}=\hat{\Gamma}=\varphi}{\Rightarrow} \varphi+\hat{B}_1+\varphi+\hat{\Gamma}_1=180° \Rightarrow \hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=180°-2\varphi \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=\hat{A} \overset{\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1}{\Rightarrow} \hat{A}=2O\hat{B}\Gamma=2O\hat{\Gamma}B$.

III. Επειδή $B\overset{\Delta}{E}\Gamma=\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}B \Rightarrow$ ΕΓ=ΒΔ και ΑΓ=ΑΒ άρα ΑΓ-ΕΓ=ΑΒ-ΔΒ $\Rightarrow$ ΑΔ=ΑΕ $\Rightarrow A\overset{\Delta}{\Delta}E$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{\Delta}_1=\hat{E}_1$ και

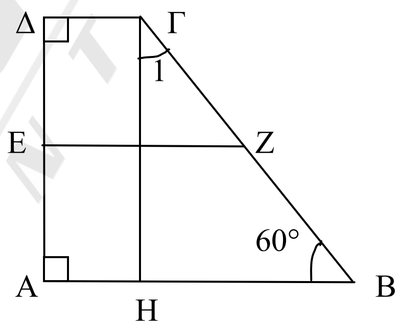
$$\hat{A}+\hat{\Delta}_1+\hat{E}_1=180° \Rightarrow \hat{A}+\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_1=180° \Rightarrow \hat{A}+2\hat{\Delta}_1=180° \Rightarrow \hat{\Delta}_1=\frac{180°-\hat{A}}{2} \quad (3)$$

Όμοια στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \overset{\hat{B}=\hat{\Gamma}=\varphi}{\Rightarrow} \hat{A}+\varphi+\varphi=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-2\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{180°-\hat{A}}{2} \quad (4)$$

Από (3) ,(4) : (δυο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες) $\Rightarrow$ Η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ

2. Φέρνω το ύψος ΓΗ του τραπεζίου .
Το ΓΗΑΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και μια γωνία ορθή.
Άρα $AH=\Gamma\Delta=2x$.



Επίσης στο ορθογώνιο $\Gamma\overset{\Delta}{H}B$ η $\hat{\Gamma}_1=30° \Rightarrow HB=\frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow$

$HB=\frac{8x}{2} \Rightarrow HB=4x$. Επομένως $AB=2x+4x=6x$

Η $EZ=\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}=\frac{6x+2x}{2}=\frac{8x}{2}=4x$

Απάντηση : Β)

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

α. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΕ.
Αυτά έχουν:

- ΑΔ κοινή
- $AZ=AE$ (υπόθ.)
- $\Delta\hat{A}Z=\Delta\hat{A}E$ (γιατί $\Delta\hat{A}Z=\hat{A}_1+\hat{\varphi}$ και $\Delta\hat{A}E=\hat{A}_2+\hat{\varphi}$ με $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ως κατακορυφήν).

Άρα $A\overset{\triangle}{\Delta}Z=A\overset{\triangle}{\Delta}E$ οπότε $\Delta Z=\Delta E$ και $\hat{E}_1=\hat{Z}_1$ (1).

β. Τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΖΓΔ έχουν:

- $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$
- $E\Delta = \Delta Z$ (από το προηγούμενο)
- $EB = Z\Gamma$ (διότι $EB = AB + AE$
  $\Gamma Z = A\Gamma + AZ$ και $AB = A\Gamma$, $AE = AZ$)

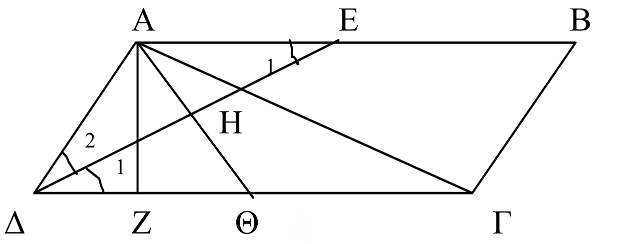
Άρα $E\overset{\triangle}{B}\Delta = Z\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$

γ. Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΔΕΓ έχουν:

- $B\Delta = \Delta\Gamma$ (διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ άρα και διάμεσος και ύψος).
- $\Delta Z = \Delta E$
- $\hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_4$ (διότι $\hat{\Delta}_3 = 90^0 - \hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_4 = 90^0 - \hat{\Delta}_2$ με $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ γιατί ισχύει $ZA\Delta = AE\Delta$)

Άρα $E\overset{\triangle}{B}\Delta = Z\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$.

<u>ΘΕΜΑ 4</u>



I) ΔΕ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta} \Rightarrow \widehat{\Delta_2} = \widehat{\Delta_1} = \varphi$.
Επίσης $\widehat{E_1} = \widehat{\Delta_1}$ (εντός εναλλάξ των ΑΕ//ΓΔ).
Άρα $\widehat{E_1} = \widehat{\Delta_2} \Leftrightarrow$ το $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ ισοσκελές. Οπότε $AE = A\Delta = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

II) Φέρνουμε $AH \perp \Delta E$.Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές $(A\Delta = AE)$ το Η μέσο της ΔΕ. Τα τρίγωνα ΗΑΔ, ΖΔΑ έχουν: {ορθογώνια, ΑΔ κοινή, $\widehat{HA\Delta} = \widehat{A\Delta Z} = 60^\circ$ }$\Rightarrow$ $H\overset{\triangle}{A}\Delta = Z\overset{\triangle}{\Delta}A$ άρα $AZ = \Delta H = \dfrac{\Delta E}{2} \Rightarrow \Delta E = 2AZ$

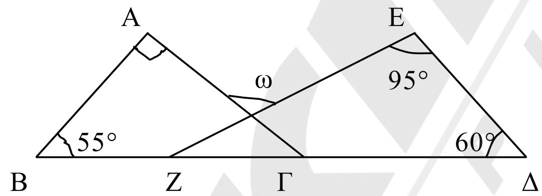
III) Η προέκταση της ΑΗ τέμνει την ΔΓ στο Θ. Το τρίγωνο ΑΔΘ είναι ισόπλευρο ,γιατί κάθε γωνία του είναι 60°.Επομένως $\Delta\Theta = A\Theta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow A\Theta$ διάμεσος του τριγώνου ΑΔΓ και ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς. Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο $\Rightarrow \widehat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$

$2^{ο}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1

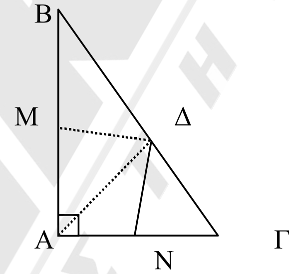
Να αποδείξετε ότι : η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

1. Το μέτρο της γωνίας ω στο παρακάτω σχήμα είναι :



Α) 100 ° Β) 110 ° Γ) 130°
Δ) 140° Ε) 120 °

2. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α και το ΑΔ ύψος του .Αν Μ είναι το μέσον της ΑΒ και Ν μέσο της ΑΓ τότε η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΜΔΝ ισούται με :



Α. ΑΓ +ΒΓ Β. ΑΒ+ΒΓ Γ. ΑΒ+ΑΓ
Δ. 2ΑΜ Ε. ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ.

3. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

A) Ενα τετράπλευρο που έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες είναι παραλλ\μο. Σ Λ

B) Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της . Σ Λ

C) Δυο γωνίες με πλευρές κάθετες μια προς μια είναι πάντα ίσες. Σ Λ

D) Δυο κατακορυφήν γωνίες είναι πάντα παραπληρωματικές. Σ Λ

E) Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μια ορθή γωνία . Σ Λ

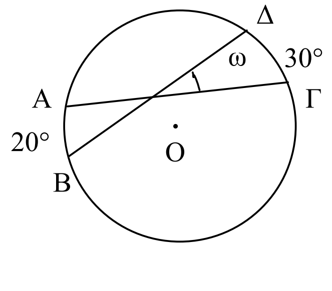
F) Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του. Σ Λ

G) Ορθογώνιο λέγεται κάθε παραλλ\μο που έχει μια ορθή γωνία . Σ Λ

ΘΕΜΑ 2

1. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου και τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

2. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν:



A. Οι διαδοχικές γωνίες του είναι συμπληρωματικές .
B. Οι απέναντι γωνίες του είναι συμπληρωματικές.
C. Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
D. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
E. Δυο απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

Αν τα τόξα έχουν ΑΒ και ΓΔ έχουν μέτρα 20°, 30°αντίστοιχα τότε η γωνία ω έχει μέτρο :

Α. 30° Β. 20° Γ. 25°
Δ. 50° Ε. 10°

ΘΕΜΑ 3

1. Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και ΑΔ ύψος , ΑΜ διάμεσος προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα $\Delta K = A\Delta$ και την ΑΜ κατά τμήμα $MN = AM$. Δείξτε ότι $BK = \Gamma N$ και ΚΝ // ΒΓ (δηλ. ΒΓΝΚ ισοσκελές τραπέζιο).

2. Η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ συναντά τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Μ.Αν Ι είναι τι έγκεντρο του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$,να αποδείξετε ότι : $MB = MI$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ $(AB = A\Gamma)$ και το μέσον Η της ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση του ΑΒ προς το Β τμήμα $BE = BH$. Η ευθεία ΕΗ τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Δείξτε ότι :

Α) $\widehat{A\Delta B} = \frac{1}{2}\widehat{AB\Gamma}$.

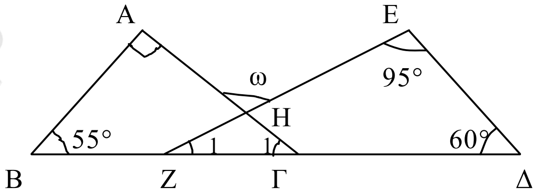
Β) Το $Z\overset{\Delta}{H}\Delta$ ισοσκελές.

Γ) Το Ζ μέσο του ΑΔ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 113).



2. Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισχύει

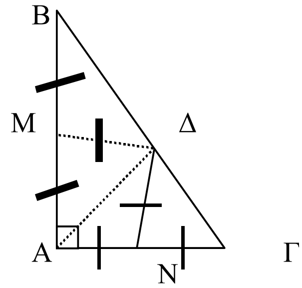
$\hat{\Gamma}_1 + \hat{B} = 90° \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 + 55° = 90° \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = 90° - 55° \Rightarrow$

$\hat{\Gamma}_1 = 35°$.

Στο $\overset{\Delta}{EZ\Delta} \Rightarrow \hat{Z}_1 + \hat{E} + \hat{\Delta} = 180° \Rightarrow \hat{Z}_1 + 95° + 60° = 180° \Rightarrow \hat{Z}_1 = 180° - 95° - 60° \Rightarrow \hat{Z}_1 = 25°$

Στο $\overset{\Delta}{HZ\Gamma} \Rightarrow \hat{Z}_1 + \hat{\Gamma}_1 + Z\hat{H}\Gamma = 180° \Rightarrow Z\hat{H}\Gamma = 180° - \hat{Z}_1 - \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow Z\hat{H}\Gamma = 180° - 25° - 35°$

$Z\hat{H}\Gamma = 120° = \omega$, ως κατακορυφήν.



<u>**Απάντηση**</u> : Ε)

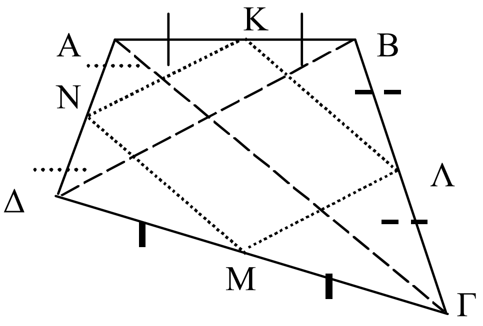
3. Στο ορθογώνια $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΓ}}$, $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΒ}}$ ισχύουν:

$\text{ΜΔ} = \text{ΜΒ} = \text{ΜΑ}$ και $\text{ΝΑ} = \text{ΝΓ} = \text{ΝΔ}$

<u>Απάντηση</u> : Γ)

4. $\text{Α} \to \Lambda$, $\text{Β} \to \Sigma$, $\text{C} \to \Lambda$, $\text{D} \to \Lambda$, $\text{E} \to \Sigma$, $\text{F} \to \Sigma$, $\text{G} \to \Sigma$

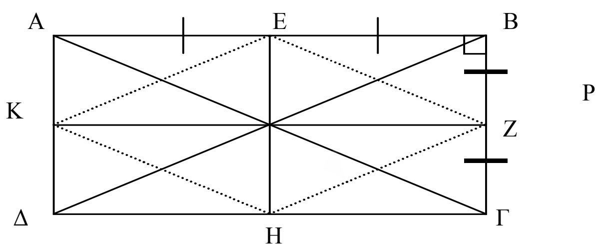
<u>ΘΕΜΑ 2</u>



1. Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Κ, Ν είναι μέσα των ΑΒ, ΑΔ άρα $\text{ΝΚ} // = \dfrac{\text{ΔΒ}}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο ΔΒΓ τα Λ, Μ είναι μέσα των ΒΓ ,ΓΔ άρα $\text{ΜΛ} // = \dfrac{\text{ΔΒ}}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) ,(2) $\Rightarrow$ ΝΚ // = ΜΛ (δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες) $\Rightarrow$ ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο.



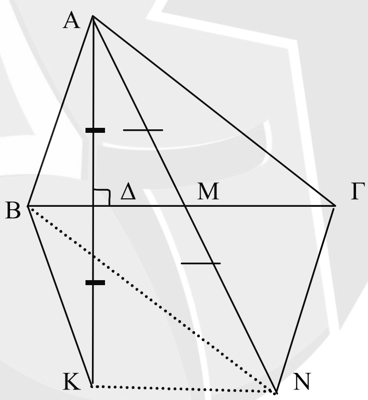
Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Ζ είναι μέσα των ΑΒ ,ΒΓ άρα $\text{ΕΖ} // = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$ (3) .Όμοια $\text{ΚΗ} // = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$, $\text{ΚΕ} // = \dfrac{\text{ΔΒ}}{2}$, $\text{ΗΖ} // = \dfrac{\text{ΔΒ}}{2}$ (4) και $\text{ΔΒ} = \text{ΑΓ}$ (5) άρα το ΕΖΗΚ παραλληλόγραμμο και επειδή έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες ΕΖ=ΚΕ (από 3,4,5) το ΕΖΗΚ ρόμβος.

2. Απάντηση : C)

3. Απάντηση : Γ) $\omega = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΓΔ}} + \overset{\frown}{\text{ΑΒ}}}{2} = \dfrac{30^\circ + 20^\circ}{2} = 25^\circ$ (Σχολικό , εφαρμογή 1 σελ 125)

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

1. Είναι $\text{ΔΚ} = \text{ΑΔ}$ άρα Δ μέσο του ΑΚ άρα ΒΔ διάμεσος στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$.Είναι όμως και ΒΔ ύψος του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$ εφόσον $\text{ΑΚ} \perp \text{ΒΓ}$.Αρα το $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$ ισοσκελές δηλαδή $\text{ΑΒ} = \text{ΒΚ}$ (1).

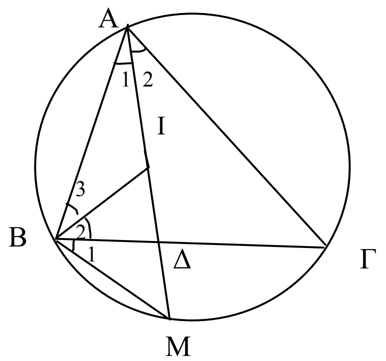


ΑΜ διάμεσος του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ άρα $\text{ΒΜ} = \text{ΜΓ}$.

Εφόσον $\text{ΑΜ} = \text{ΜΝ}$ έχουμε ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ διχοτομούνται .

Άρα ΑΒΝΓ παραλληλόγραμμο οπότε $\text{ΓΝ} = \text{ΑΒ}$ (2). Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\text{ΒΚ} = \text{ΓΝ}$.

Στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΚΝ}}$ τα Δ , Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΚ, ΑΝ αντίστοιχα άρα ΔΜ // ΚΝ δηλ. ΚΝ // ΒΓ. Άρα ΒΓΝΚ ισοσκελές τραπέζιο.

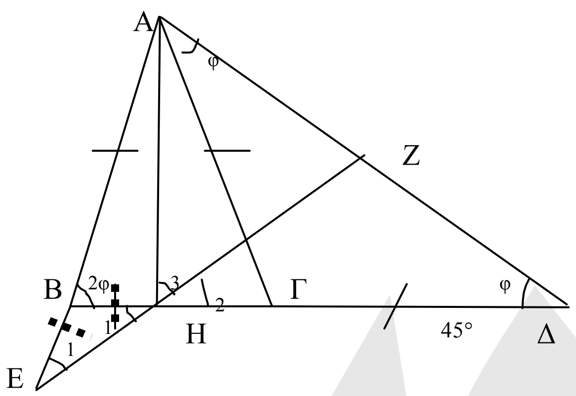


2. ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{\hat{A}}{2}$ (1)

Οι $\hat{A}_2, \hat{B}_1$ εγγεγραμμένες στο $\overset{\frown}{M\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{B_1} \overset{(4)}{=} \widehat{A_2} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \frac{\widehat{A}}{2}$ (2).Εφόσον (Ι) έγκεντρο $\Leftrightarrow$ ΒΙ διχοτόμος της $\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_3 = \frac{\hat{B}}{2}$ (3) .

Τότε $\widehat{IBM} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$ (4). Η $\widehat{BIM}$ εξωτερική γωνία του $\overset{\Delta}{ABI} \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{A_1} + \widehat{B_3} \underset{(3)}{\overset{(1)}{=}} \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$ (5) . Από (4) , (5) $\Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{MIB} \Rightarrow B\overset{\Delta}{I}M$ ισοσκελές $\Rightarrow BM = MI$.

ΘΕΜΑ 4



Α) Το $A\Gamma = \Gamma\Delta$ δηλ. $A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές $\Rightarrow \widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma A\Delta} = \varphi$ (1)

Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές τρίγωνο $\Rightarrow \widehat{A\Gamma B} = \widehat{AB\Gamma}$ (2)

Η $A\hat{\Gamma}B$ εξωτερική του $A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta \Rightarrow \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Gamma A\Delta} + \widehat{\Gamma\Delta A} = 2\varphi \overset{(2)}{\Rightarrow} \widehat{AB\Gamma} \overset{(1)}{=} 2\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{AB\Gamma} = 2\widehat{A\Delta B} \Rightarrow \widehat{A\Delta B} = \frac{1}{2}\widehat{AB\Gamma}$.

Β) Το $BE = BH \Rightarrow B\overset{\Delta}{E}H$ ισοσκελές τρίγωνο$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (3)

Στο $\widehat{AB\Gamma}$ εξωτερική στο $B\overset{\Delta}{E}H \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} = \widehat{H_1} + \widehat{E_1} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} 2\varphi = 2\widehat{H_1} \Rightarrow \varphi = \widehat{H_1}$ (4)

Ισχύει $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ως κατακορυφήν $\overset{(4)}{\Rightarrow} \hat{H}_2 = \varphi \Rightarrow \overset{\Delta}{HZ\Delta}$ ισοσκελές.

Γ) $\widehat{AH\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{H}_2 = \varphi \Rightarrow \hat{H}_3 = 90^\circ - \varphi$

Από $\overset{\Delta}{AH\Delta}$ ορθογώνιο με $\hat{\Delta} = \varphi \Rightarrow \widehat{HA\Delta} = 90^\circ - \varphi$. Άρα $\hat{H}_3 = 90^\circ - \varphi = \widehat{HAZ} \Rightarrow$ Το $Z\overset{\Delta}{H}A$ ισοσκελές $\Rightarrow$ ΑΖ =ΖΗ (5) και επειδή $H\overset{\Delta}{\Delta}Z$ ισοσκελές ς$\Rightarrow$ ΗΖ =ΖΔ (6) .
Από (5) ,(6) $\Rightarrow$ ΑΖ =ΖΔ $\Rightarrow$ Το Ζ μέσο του ΑΔ.

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1

Α1. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες

ii) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές

iii) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

iv) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

v) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Α2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

ΘΕΜΑ 2

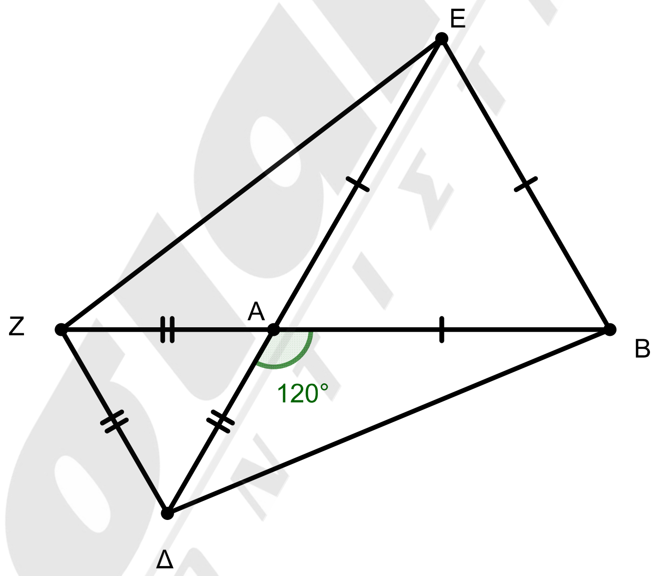
Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{A}=120^\circ$.

Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

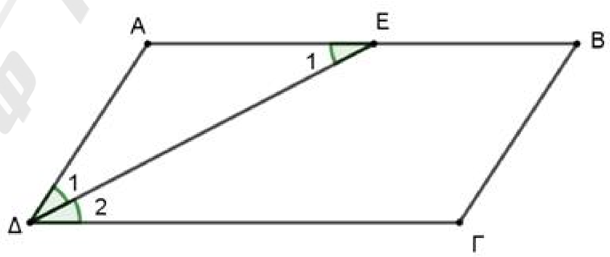
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}=120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ.

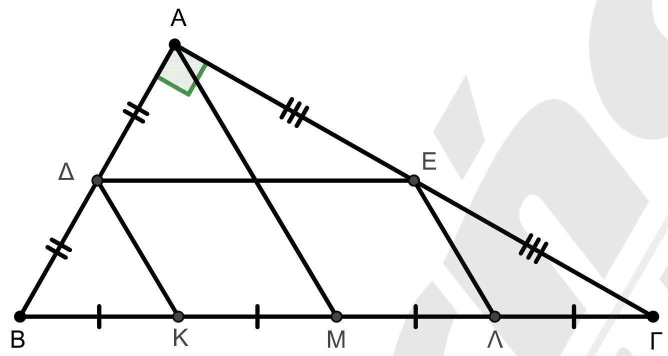
β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΕ}{ΗΕ}=2$.

γ) Αν Μ το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{A}Γ=90^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε ΒΚ=ΚΜ=ΜΛ=ΛΓ. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}$ ΒΓ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1.

- i) Λ
- ii) Σ
- iii) Σ
- iv) Λ
- v) Σ

Α2. Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ 2

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΔ έχουν : ΑΔ=ΑΖ (δεδομένο), ΑΕ=ΑΒ (δεδομένο), $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}Z$ (κατακορυφήν), επομένως από το κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ισόπλευρα, άρα όλες οι γωνίες τους είναι 60^o.

Επομένως $Z\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}B = 60^O$ και είναι εντός εναλλάξ, επομένως οι πλευρές ΖΔ και ΒΕ είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 3

α) ΔΕ διχοτόμος της $\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΔΕ, επομένως: $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, άρα ΑΔΕ ισοσκελές με ΑΔ=ΑΕ και Ε μέσο του ΑΒ άρα: ΑΒ=2ΑΕ=2ΑΔ.

β) Είναι : $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^o$ άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 30^o$ ($\hat{A}, \hat{\Delta}$ εντός και επί τα αυτά και ΔΕ διχοτόμος). Στο ορθογώνιο ΔΕΗ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = 30^o \Rightarrow EH = \frac{\Delta E}{2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{EH} = 2$.

γ) Μ μέσο της ΔΓ άρα $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = A\Delta$ (ΑΒ=ΔΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου), επομένως το ΑΔΜ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60^o , επομένως ισόπλευρο.

δ) Αφού ΑΔΜ ισόπλευρο $AM = M\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ και ΑΜ διάμεσος της ΔΓ στο τρίγωνο ΔΑΓ, άρα είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΔΓ, συνεπώς: $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$

ΘΕΜΑ 4

α) ΔΕ ενώνει τα μέσα 2 πλευρών του ΑΒΓ, επομένως: ΔΕ//ΒΓ, άρα ΔΕ//ΚΛ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BM}{2} + \frac{M\Gamma}{2} = KM + M\Lambda = K\Lambda$,επομένως ΔΕΛΚ παραλληλόγραμμο.

β) ΔΚ ενώνει τα μέσα 2 πλευρών του ΑΒΜ, επομένως: ΔΚ//ΑΜ και $\Delta K = \frac{AM}{2}$, ενώ οι ΑΔ και ΜΚ τέμνονται στο Β, συνεπώς ΚΔΑΜ τραπέζιο. Η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓ, επομένως $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $K\Delta = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$. Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του , δηλαδή

$$\frac{K\Delta + AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{4} + \frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{4}}{2} = \frac{3B\Gamma}{8}$$

$4^{ο}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Β. α. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία, είναι πάντοτε παραπληρωματικές Σ Λ
2. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη εσωτερική γωνία του τριγώνου Σ Λ
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο πλευρές είναι τα ύψη του Σ Λ

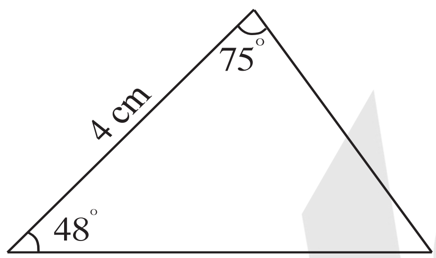
β. Ένα σημείο Α απέχει από μια ευθεία ε απόσταση ίση με α. Ο κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα $\frac{3α}{2}$

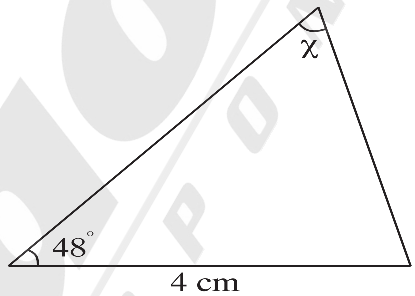
1. εφάπτεται της ε
2. τέμνει την ε
3. δεν έχει κοινά σημεία με την ε
4. έχει περισσότερα από δύο κοινά σημεία με την ε

(Κυκλώστε τη σωστή απάντηση)

ΘΕΜΑ 2

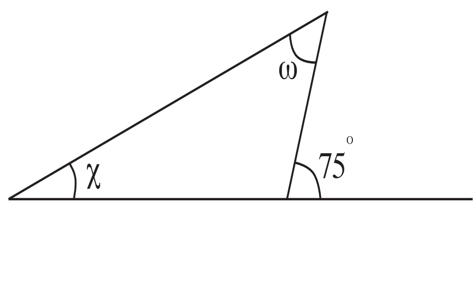
Α. Τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα. Τα μέτρα μερικών πλευρών και γωνιών των δύο τριγώνων φαίνονται στα σχήματα:





Να βρείτε το μέτρο της γωνίας x.

Β. Στο σχήμα η γωνία ω είναι διπλάσια από τη γωνία x.
Να βρείτε το μέτρο της γωνίας x.



ΘΕΜΑ 3

Α. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι, της γωνίας του Β και της εξωτερικής γωνίας στο Γ τέμνονται στο Ζ. Να δείξετε ότι: $B\hat{Z}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$.

Β. Θεωρούμε τη γωνία $x\hat{O}y$ και ένα σημείο Μ της διχοτόμου της ΟΖ. Στις πλευρές της Οx και Οy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Α και Β έτσι ώστε: $M\hat{A}x = M\hat{B}y$. Να δείξετε ότι η ΟΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 30^0$. Έξω από αυτό κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ. Οι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε. Να δείξετε ότι:

1. ΑΒ//ΓΔ

2. Το Α είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ