

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα σελ. σχολ. βιβλ. 135

A2. $\alpha \rightarrow \Lambda$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, ενώ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

A3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 73

A4. $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Lambda$, $\delta \rightarrow \Sigma$, $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f(x) = \ln x, D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, D_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{array} \right\} = (0, 1).$$

Άρα $D_{f \circ g} = (0, 1)$ με τύπο $h(x) = (f \circ g)_{(x)} = \ln \frac{x}{1-x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

B2.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{(x)' \cdot (1-x) - x \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-x+x}{1-x} = \\ &= \frac{1}{x(1-x)} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Άρα $h(x)$ γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = +\infty$

Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \right)$, άρα $(-\infty, +\infty)$. Θέτω :

$$y = h(x)$$

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$e^y = \frac{x}{1-x}$$

$$(1-x) \cdot e^y = x$$

$$e^y - x \cdot e^y = x$$

$$e^y = x + x \cdot e^y$$

$$(e^y + 1) \cdot x = e^y$$

$$x = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

$$h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

$$\text{Άρα } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \text{ με } D_{h^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

B3.

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η $\varphi(x)$ δεν έχει ακρότητα.

$$\varphi''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} =$$

$$= \frac{e^x (e^x + 1) [e^x + 1 - 2e^x]}{(e^x + 1)^4} =$$

$$= \frac{e^x (e^x + 1)(1 - e^x)}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x (1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

$$\varphi''_{(x)} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{για } x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow -e^x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0$$

$$\text{για } x < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0$$



	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	+	0	-
φ			

Άρα η φ στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 0]$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, \varphi(0))$ όπου $\varphi(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$. Άρα $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ηB4.

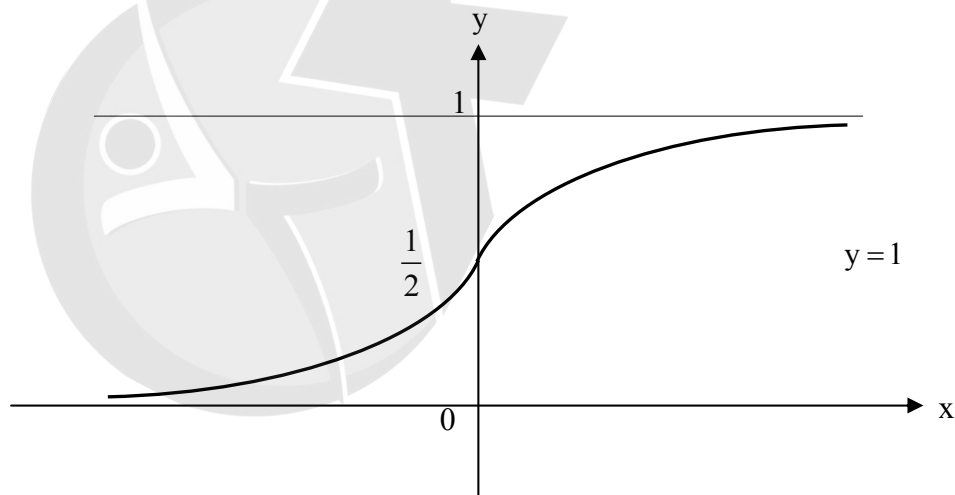
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Επομένως η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{1} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	-
f'	+	+	
f			



ΘΕΜΑ Γ
Γ1.

$$f(x) = -\eta\mu x$$

$$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

 Η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$,

$$\text{θα είναι } \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

 Το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει στην (ε) , άρα

$$-\frac{\pi}{2} - (-\eta\mu x_0) = (-\sigma\upsilon\nu x_0)\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 0$$

 Έστω η συνάρτηση $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } g(0) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{και } g(\pi) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu \pi + \sigma\upsilon\nu \pi\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 - 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\eta\mu x$	-	-	-
$\frac{\pi}{2} - x$	+	0	-
g'	-	+	-
g	↘		↗

 Άρα στο $[0, \pi]$, η g μηδενίζεται μόνο στο g και στο π .

 Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $(0, f(0))$ και $(\pi, f(\pi))$

$$\text{Άρα } \varepsilon_1: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-\eta\mu 0) = (-\sigma\upsilon\nu 0) \cdot x$$

$$y - 0 = -1 \cdot x$$

$$\varepsilon_1: y = -x$$

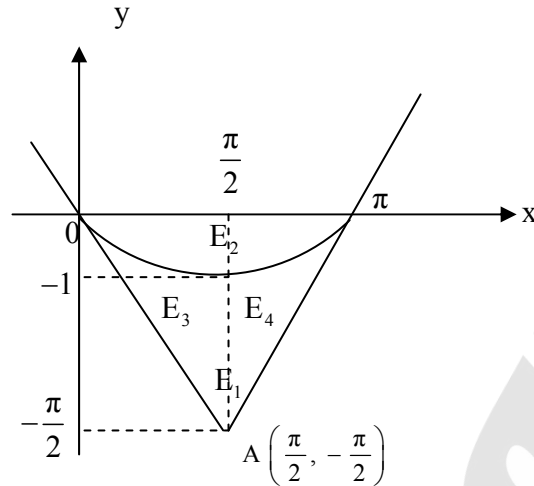
$$\text{και } \varepsilon_2: y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi)$$

$$y - (-\eta\mu\pi) = (-\sigma\upsilon\nu\pi)(x - \pi)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - \pi)$$

$$\varepsilon_2 : y = x - \pi$$

Γ2.



$$E_1 = E_3 + E_4 = \int_0^{\pi/2} (f(x) - \varepsilon_1) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (f(x) - \varepsilon_2) dx = \int_0^{\pi/2} (-\eta\mu x + x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi) dx =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x \right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \left(\sigma\upsilon\nu 0 + \frac{0^2}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi \cdot \pi - \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi \cdot \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 0 + \frac{\pi^2}{8} - 2 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2 - 16 - 4\pi^2 + 8\pi^2 + \pi^2 - 4\pi^2}{8} = \frac{2\pi^2 - 16}{8}$$

$$E_2 = -\int_0^{\pi} f(x) dx = -\int_0^{\pi} (-\eta\mu x) dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \sigma\upsilon\nu \pi - (-\sigma\upsilon\nu 0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{2\pi^2 + 16}{8}}{2} = \frac{2\pi^2 + 16}{16} = \frac{2\pi^2}{16} - \frac{16}{16} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left[(f(x) + x) \frac{1}{f(x) - x + \pi} \right] = \ell$$

- $\lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x + x) = -\eta\mu\pi + \pi = \pi$

- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi}$ ισχύει $f(x) - (x - \pi) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x + \pi > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) - x + \pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x - x + \pi) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

$$\text{Επομένως } \ell = \pi(+\infty) = +\infty$$

Γ4.

Ξέρουμε ότι $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in (1, e)$, άρα για $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} > \frac{x - \pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \frac{x - \pi}{x} > 0$

Άρα

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{x - \pi}{x} \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^e \frac{x - \pi}{x} dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \frac{x - \pi}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x} \right) dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e [x - \ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \ln e - (1 - \pi \ln 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi \cdot 1 - 1 + 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{0^4} = 0, \quad f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 1 \cdot 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \quad (1)$$

Η f συνεχής για κάθε $x \in (0, \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων:

$$(e^x \text{ εκθετική}), \eta\mu x \text{ (τριγωνομετρική)} \quad (2)$$

$$\text{Η } f \text{ συνεχής στο } (-1, 0) \text{ ως άρρητη} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \eta \text{ } f \text{ συνεχής στο } [-1, \pi]$$

Ως γνωστόν τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του $[-1, \pi]$ για τα οποία

- η f' μηδενίζεται
- δεν παραγωγίζεται

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ ως άρρητη με

$$f'_{(x)} = \left(\sqrt[3]{x^4} \right)' = \left(\sqrt[3]{|x|^4} \right)' = \left(|x|^{4/3} \right)' = \left((-x)^{4/3} \right)' = \frac{4}{3} (-x)^{4/3-1} \cdot (-x)'$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (-x)^{1/3} \cdot (-1) = -\frac{4}{3} (-x)^{1/3} \quad (4)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως γινόμενο παραγόντων

$$\text{με } f'(x) = (e^x \cdot \eta\mu x)' = (e^x)' \eta\mu x + e^x (\eta\mu x)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \\ e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \quad (5).$$

$$\text{Η } f'(x) = \frac{-4}{3 \cdot \sqrt[3]{-x}} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, 0)$$

$$\text{Η } f'(x) = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad (e^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow -\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow -\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \in (0, \pi) \text{ κρίσιμο σημείο}$$

$$\text{Για } x < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - 0}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4}}{-\sqrt[3]{(-x)^3}} = -\sqrt[3]{\frac{x^4}{-x^3}} = -\sqrt[3]{-x} \Rightarrow$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{-x}) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \frac{\eta\mu x}{x} \right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

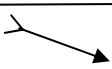
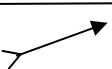
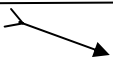
Άρα το $x_2 = 0 \in (-1, \pi)$ κρίσιμο σημείο

$$\Delta 2. f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

i) Η f συνεχής στο $[-1, \pi]$

ii) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [-1, 0) \Rightarrow$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$

iii) Έστω $f'(x) = 0$ (για $x \in (0, \pi]$) $\Rightarrow e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f'	-	+	-	
f				

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{2} \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \right) = e^{\frac{\pi}{2}} (1+0) > 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ διότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, καθ' όσον συνεχής και δεν παρεμβάλλονται άλλες ρίζες.

$$\text{Για } x = \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{\frac{5\pi}{6}} \left(\eta\mu \frac{5\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \right) = e^{\frac{5\pi}{6}} \left(\eta\mu \frac{5\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= e^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

Για τον ίδιο λόγο \Rightarrow η f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$,

η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Η f συνεχής $[-1, \pi] \Rightarrow$

$$f(A) = f\left(\left[-1, \pi\right]\right) = [f(0), f(-1)] \cup \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \cup \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$f(0) = 0, f(-1) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4} = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\pi) = e^{\pi} \cdot \eta\mu \pi = e^{\pi} \cdot 0 = 0 \text{ άρα}$$

$$f(A) = [0, 1] \cup \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{Έστω } \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}}{2} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \sqrt{2} > 2 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^2 \cdot 2 > 4$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^2 > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > 2 \text{ το οποίο και ισχύει, διότι}$$

$$\frac{3\pi}{2} > 1 \xrightarrow{e^x \nearrow} e^{\frac{3\pi}{2}} > e^1 \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > e > 2$$

$$\text{Άρα } f(A) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Δ3.

$$E = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\pi} |e^x \eta \mu x - e^{5x}| dx =$$

Έστω $h(x) = e^x \eta \mu x - e^{5x}$ για $x \in [0, \pi]$

$$h'(x) = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x - 5e^{5x} = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) - 5e^{5x}$$

$$\text{Αλλά } \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 2 \Rightarrow e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) \leq 2e^x \Leftrightarrow$$

$$e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) - 5e^{5x} \leq 2e^x - 5e^{5x} < 0 \quad h'(x) < 0$$

και $h(x) [0, \pi]$

$$\text{για } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow h(0) \geq h(x) \geq h(\pi) \Leftrightarrow$$

$$h(\pi) \leq h(x) \leq h(0), \quad \text{όπου } h(\pi) = e^{\pi} \eta \mu \pi - e^{5\pi} = -e^{5\pi}$$

$$h(0) = e^0 \eta \mu 0 - e^0 = -1$$

$$\text{Άρα } -e^{5\pi} \leq h(x) \leq -1$$

$$\text{Άρα } h(x) < 0$$

$$E = \int_0^{\pi} -(e^x \eta \mu x - e^{5x}) dx = -\int_0^{\pi} e^x \eta \mu x + \int_0^{\pi} e^{5x} dx$$

$$E_1 = \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} (e^x)' \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$= \cancel{e^{\pi} \eta \mu \pi} - \cancel{e^0 \eta \mu 0} - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$= -[e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x (-\eta \mu x) dx =$$

$$-[e^{\pi} \sigma \upsilon \nu \pi - e^0 \sigma \upsilon \nu 0] - I_1 \Leftrightarrow 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

$$I_2 \int_0^{\pi} e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int_0^{\pi} (e^{5x})' dx = \frac{1}{5} [e^{5x}]_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{5} (e^{5\pi} - e^0) = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

$$\text{Άρα } E = -I_1 + I_2 = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$$

$$e^{-\frac{3\pi}{4}} [16f(x) - (4x - 3\pi)^2] = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8e^{-\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

Παρατηρώ ότι μία προφανή ρίζα είναι η $x = \frac{3\pi}{4}$ όπου $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$

Επίσης ισχύει:

$$f[(-1, \pi)] \rightarrow \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{όπου } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = f \max$$

Η συνάρτηση $f(x)$ δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη της μέγιστης $f \max$
 $f(x) \leq f \max$

$$\text{Επομένως στην εξίσωση } f(x) = f \max + \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

$$\text{πρέπει το } \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0 \quad \forall x \in [-1, \pi]$$

Άρα $x = \frac{3\pi}{4}$ μοναδική λύση

Παρατηρούμε ότι για

$$x \in [-1, 0] \text{ ισχύει } f(x) = \sqrt[3]{x^4} \text{ όπου}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{ επομένως } (1) \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \leq 1 - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \text{ αδύνατο δίνει } \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$$

Άρα η f έχει μοναδική λύση την $x = \frac{3\pi}{4}$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές