ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

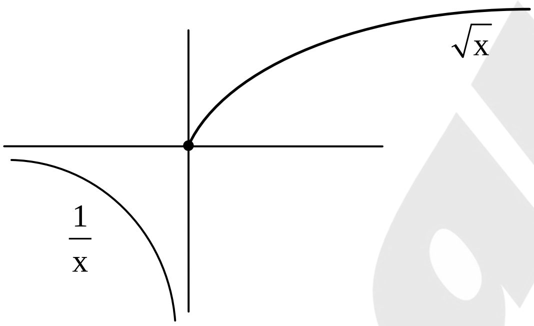
ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. σχολ. βιβλ. 99

Α2.

α. Λ

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x<0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ της οποία η γραφική παράσταση είναι :



Παρατηρούμε ότι ενώ η f είναι συνεχής και «1-1» σε κάθε κλάδο της, αυτή δεν είναι γνησίως μονότονη αφού για $x<0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και για $x\geq 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 216

Α4. Λ, Λ, Σ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1..

$f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in R-\{0\}$

$f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-8}=-2$

$x^3+8>0 \Leftrightarrow x>-2$

$x^3+8<0 \Leftrightarrow x<-2$

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$	‖	$+$
x^3	$-$		$-$	‖	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$	‖	$+$

Για $x\in(-\infty,-2]$, η f ↗

Για $x\in[-2,0)$, η f ↘

Για $x\in(0,+\infty]$, η f ↗

Στη θέση $x=-2$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2)=-2-\frac{4}{(-2)^2}=-3$

Στη θέση $x=0$ η f δεν ορίζεται άρα δεν παρουσιάζει ακρότατο

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↗		↘	‖	↗

B2.

$f''(x)=-\frac{8\cdot 3x^2}{x^6}\frac{-24}{x^4}<0$, για κάθε $x\in R-\{0\}$

Άρα η f είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$

Η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\frown$	‖	$\frown$

B3.

<u>κατακόρυφες :</u> $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Άρα η $x=0$, (ο άξονας y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

<u>πλάγιες :</u>

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x^3}=0$ άρα $\lambda=1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

  Άρα $\beta=0$ και η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, ή $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1=\lambda$

  και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

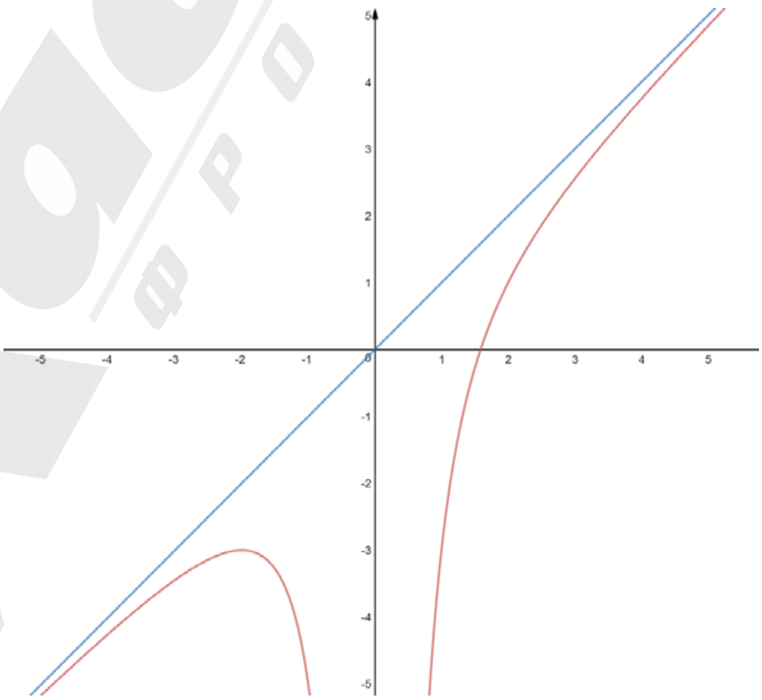
B4.

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$

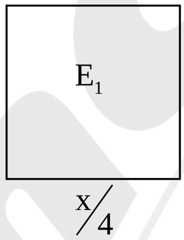
η $y=x$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη



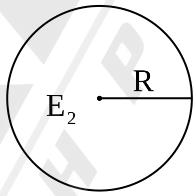
ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Έστω x το ένα τμήμα του σύρματος. Τότε $8-x$ είναι το άλλο τμήμα. Τότε κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο πλευράς $\alpha=\frac{x}{4}$ και έναν κύκλος μήκους $L=8-x$. Άρα $E_1=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$ και

$$\left.\begin{array}{l} L=8-x \\ L=2\pi R \end{array}\right\} 8-x=2\pi R \Leftrightarrow R=\frac{8-x}{2\pi}$$, άρα $E_2=\pi R^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$



Επομένως $E_1+E_2=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$ όπου $0<x<8$

Άρα $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$

Γ2.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ ως πολυωνιμική.

Τότε $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$

	0	$32/(\pi+4)$	8
E'	$-$	0	$+$
E	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.

Η συνάρτηση $E(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{32}{\pi+4}$

Ισχύει $\alpha=\delta$ όπου δ η διάμετρος του κύκλου τότε

$\frac{x}{4}=2R \Leftrightarrow \frac{x}{4}=2\left(\frac{8-x}{2\pi}\right) \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$, που ισούται με τη θέση στην οποία η $E(x)$ ελαχιστοποιείται.

Γ3.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $E(x)$

$$\lim_{x\to0^+}E(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}>5$$

$$\lim_{x\to8^-}E(x)=\lim_{x\to8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{16\cdot4}{16}=4<5$$

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=E_{mm}=\frac{1}{16\pi}\left[\cancel{(\pi+4)}\frac{32^2}{(\pi+4)^{\cancel{2}}}-64\frac{32}{\pi+4}+256\right]\simeq 2,24$$

Αν $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ τότε $E(A_1)\overset{\searrow}{=}\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=[2,24\,,\,5,19)$

Αν $A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ τότε $E(A_2)\overset{\nearrow}{=}\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)=[2,24\,,\,4)$

Αλλά $5\in E(A_1)$ και είναι μοναδική τιμή διότι $E\searrow$ για κάθε $x\in A_1$. Άρα υπάρχει μοναδικός τρόπος.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $\alpha>1$, $x\in R$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$

$f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1=0\Leftrightarrow x=\alpha$

$f''(x)>0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)>0\Leftrightarrow x>\alpha$

$f''(x)<0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)<0\Leftrightarrow x<\alpha$

	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Σ.Κ.

Το σημείο $A\left(\alpha\ ,\ f(\alpha)\right)$ ή $A\left(\alpha\ ,\ 2-\alpha^2\right)$ είναι σημείο καμπής της f το οποίο είναι μοναδικό διότι η εξίσωση

$2\left(e^{x-\alpha}-1\right)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$

Δ2.

$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$

$f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0+\infty=+\infty$ και η f' συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{2e^{x-\alpha}}{x}-2\right)\right]=+\infty$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x-\alpha}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DHL}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x-\alpha}}{1}=+\infty$$

- $f'(\alpha)=2e^0-2\alpha=2-2\alpha=2(1-\alpha)<0$ για $\alpha>1$

Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f'

Αν $A_1=(-\infty,\alpha]$ τότε $f'(A_1)\overset{f'\searrow}{=}\left[f'(\alpha),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[2-2\alpha,\ +\infty\right)$

Αν $A_2=[\alpha,+\infty)$ τότε $f'(A_2)\overset{f'\nearrow}{=}\left[f'(\alpha),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[2-2\alpha,\ +\infty\right)$

αλλά το $2-2\alpha<0$ για $\alpha>1$ επομένως το $0\in f'(A_1)$ και το $0\in f'(A_2)$.

Από το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει $x_1\in A_1$ ώστε $f'(x_1)=0$ και υπάρχει $x_2\in A_2$ ώστε $f'(x_2)=0$.

Επίσης το x_1 μοναδική λύση της f' στο $(-\infty,\alpha]$ αφού f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$

και το x_2 μοναδική λύση της f' στο $[\alpha,+\infty)$ αφού f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$

για $x<x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0$

για $\alpha>x>x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0$

για $\alpha < x < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0$

για $x > x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0$

Από τα πρόσημα της f' βρίσκουμε τη μονοτονία της f :

για $x \in (-\infty,\, x_1]$ η f γνησίως αύξουσα

για $x \in [x_1,\, x_2]$ η f γνησίως φθίνουσα (στο α η f συνεχής)

για $x \in [x_2,\, +\infty)$ η f γνησίως αύξουσα

Επομένως στη θέση x_1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στη θέση x_2 τοπικό ελάχιστο.

	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$ ↘	0	↘ $-$		$-$ ↗	0	↗ $+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			Τ.Μ.				Τ.Ε.		

Δ3.

Έστω ότι υπάρχει λύση $x_0 \in (\alpha, x_1)$, τότε ισχύει $f(x_0) = f(1)$. Για την f η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,\, x_0]$ εφαρμόζεται θεώρημα Rolle. Άρα υπάρχει $\xi \in (1,\, x_0)$ ώστε $f'(\xi) = 0$

άρα $\begin{cases} \xi = x_1 \\ \text{ή} \\ \xi = x_2 \end{cases}$ άτοπο διότι τα $x_1,\, x_2 \notin (\alpha,\, x_1)$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(\alpha,\, x_2)$

Δ4.

Για $\alpha = 2$, $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$, $f(2) = 2e^0 - 4 = -2$, $f'(2) = 2e^0 - 4 = -2$

Η συνάρτηση f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(2,\, f(2))$ ή $A(2,\, -2)$, την

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x-2)$. Άρα $y = -2x + 2$ και επειδή η f στο διάστημα $[2,\, 3]$ γνησίως φθίνουσα και η $f''(x) = 2e^{x-2} - 2 = 2\left(e^{x-2} - 1\right) > 0$ για κάθε $x \in [2,3]$, η f κυρτή και επομένως $f(x) \ge -2x + 2$

$f(x)\sqrt{x-2} \ge (2-2x)\sqrt{x-2}$, άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (2-2x)\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u$ και $x - 2 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 + 2$, $dx = 2u\,du$

Για $x = 2$, τότε $u = 0$

Για $x = 3$, τότε $u = 1$

Άρα $\int_2^3 (2-2x)\sqrt{x-2}\,dx = \int_0^1 \left[2 - 2\left(u^2+2\right)\right] u \cdot 2u\,du = \int_0^1 \left(-4u^4 - 4u^2\right) du = -4\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{32}{15}$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές