

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη θεωρήματος Fermat – Σελ. σχολ. Βιβλίου 260

A2. Ορισμός ασύμπτωτης – Σελ. σχολ. βιβλίου 200

A3. α. Σ , β. Σ , γ. Λ , δ. Λ , ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.. $2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$

Κύκλος $K(0,3)$, $\rho = 1$

B2. $|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow$

$$|z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

B3. Έστω $z = x + yi$

$$\bar{w} = \bar{z} + 3i + \frac{1}{z + 3i} = \frac{1}{z - 3i} + z - 3i = w$$

$$w = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} |z - 3i| = 1 \\ z = x + yi \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2$$

$$-2 \leq w \leq 2$$

$$\mathbf{B4.} |z - w| = \left| z - (z - 3i) - \frac{1}{z - 3i} \right| = |z - z + 3i - \bar{z} - 3i| = |\bar{z}| = |z|$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(0) = f(0) = 0$$

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

$$\mathbf{Γ1.} \quad f(x) = \ln(e^x - x)$$

$$(e^x f'(x) - e^x)' = (x f'(x))'$$

$$e^x f'(x) - e^x = x f'(x) + c_2$$

$$e^x f'(x) - x f'(x) = e^x + c_2$$

$$(e^x - x) f'(x) = e^x + c_2$$

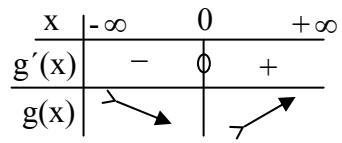
$$\text{Άρα } f'(0) = 0$$

$$0 = e^0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1 \quad e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1$$



$$\tau, \varepsilon.$$

$$g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

Άρα $g(x) \neq 0 \forall x$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$$

$$\text{Άλλα } f(0) = 0 \text{ άρα } 0 = \ln(e^0 - 0) + c$$

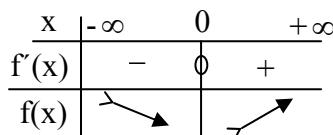
$$0 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \ln(e^x - x), \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Αφού $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \stackrel{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$



$$\tau, \varepsilon.$$

$$f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$$

Γ3. Αφού $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

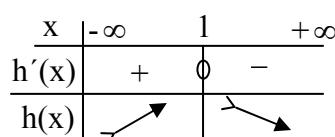
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0$$

Έστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1 = 0$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

$$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$



$$\tau, \mu.$$

$$h(1) = 2e^1 - 1e^1 - 1 = e - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1$$

$$A_1 = (-\infty, 1] \quad h \nearrow$$

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(1) \right] = (-1, e-1]$$

$0 \in h(A_1)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική
 $A_2 = [1, +\infty) \quad h \searrow$

$$h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{Άρα } h(A_2) = (-\infty, e-1]$$

$0 \in h(A_2)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική

Ο πίνακας μεταβολών είναι ο εξής :

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	-	-
$h(x)$	-	0	+	+	-
$f''(x)$	-	0	+	+	0
$f(x)$	↙	↙	↗	↗	↙

$\Sigma.K.$ $\Sigma.K.$

Άρα εμφανίζει Σημείο Καμπής στο $M_1 (x_1, f(x_1))$ και στο $M_2 (x_2, f(x_2))$

$$\Gamma 4. \ln(e^x - x) = \sigma v x$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } \varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sigma v x$$

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$\varphi(0) = \ln(e^0 - 0) - \sigma v 0 = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma v \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα. Όμως $\varphi'(x) = (\ln(e^x - x) - \sigma v x)' = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta \mu x > 0$. Άρα η φ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta 1. 1 - f(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτω $x + t = u$

$$dt = du$$

$$t = 0 \Rightarrow u = x$$

$$t = -x \Rightarrow u = 0$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$\cancel{\frac{1-f(x)}{e^{2x}}} = \int_x^0 \cancel{\frac{1}{e^{2x}}} \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$1 - f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$f(x) - 1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Όμοια } g(x) - 1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Επειδή e^{2x}, f, g συνεχείς, τότε $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ παραγωγίσιμες

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{Όμοιως: } g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$f'(x)g(x) = f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \\ \Gamma\alpha \quad x = 0 \Rightarrow f(0) &= 1 = g(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Delta 2. f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x}$$

$$[f^2(x)]' = (e^{2x})'$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c \quad (x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c = 0)$$

$$f^2(x) = e^{2x} \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x$$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{x} e^{1/x}} \\ &\stackrel{\text{lim}}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{ye^y} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Θέτω } y = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{e^y} \stackrel{(D.H.)}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y) = 0$$

$$y \rightarrow -\infty \Rightarrow y < 0 \text{ αρα } ye^y < 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{ye^y} = -\infty$$

Δ4. $E(\Omega) = \int_0^1 |F(x)| dx$

$$F'(x) = e^{x^2} > 0 \Rightarrow F \nearrow$$

$$x > 1 \Rightarrow F(x) > 0$$

$$x < 1 \Rightarrow F(x) < 0$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 -F(x) dx = - \int_0^1 x' F(x) dx = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xe^{x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$$