ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 30.
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 13.
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 59.
Α4. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Το ύψος κάθε ιστού μιας κλάσης παριστάνει στον πίνακα συχνοτήτων την αντίστοιχη συχνότητα. Άρα $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 14$, $\nu_4 = 6$. Τότε το πλήθος ν των πωλητών θα είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Β2.

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$x_i\nu_i$
$[2,4)$	3	12	0,3	36
$[4,6)$	5	8	0,2	40
$[6,8)$	7	14	0,35	28
$[8,10)$	9	6	0,12	54
Σύνολο		40	1	228

Ο οριζόντιος άξονας του πίνακα συχνοτήτων μας δίνει τις κλάσεις. Επίσης η κεντρική τιμή κάθε κλάσης $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$ όπου α, β τα άκρα κάθε κλάσης.

Αν f_i η συχνότητα της μεταβλητής x_i τότε $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ άρα :

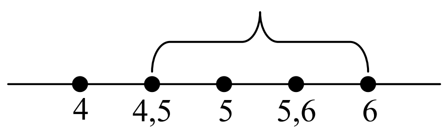
$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0,3$, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0,2$,

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0,35$, $f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0,15$

Β3.

α) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu} = \frac{228}{40} = 5,7$ χιλιάδες ευρώ

β) Επειδή σε κάθε μία κλάση οι τιμές της μεταβλητής είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες άρα στη 2^{η} κλάση, το διάστημα από το 4,5 έως το 6 αντιστοιχεί στα ¾ της κλάσης, άρα $\frac{3}{4}\nu_2$ τότε το πλήθος των πωλητών που έκαναν τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες πωλήσεις αντιστοιχεί από 4,5 χιλιάδες πωλήσεις και πάνω δηλαδή :



$\frac{3}{4}\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \frac{3}{4}\cdot 8 + 14 + 6 = 26$ πωλητές

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο R με πρώτη παράγωγο $f'(x)=12x^2-7x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{3},\ \ x_2=\frac{1}{4}$

Επειδή εκατέρωθεν των τιμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$ το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει. Άρα τα σημεία $x_1=\frac{1}{4}$ και $x_2=\frac{1}{3}$ είναι θέσεις τοπικών ακρότατων. Τότε $P(K)=x_1=\frac{1}{4}$ και

	$-\infty$	$1/4$	$1/3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0 +
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

$P(A)=x_2=\frac{1}{3}$ ισχύει $P(A)+P(K)+P(\Pi)=1 \Leftrightarrow P(\Pi)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\Pi)=\frac{5}{12}$

Γ2. Για τα ενδεχόμενα Κ, Α ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος διότι είναι ασυμβίβαστα

$\Gamma=K\cup A$. Άρα $P(\Gamma)=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

$\Delta=(K\cup A)'$. Άρα

$$P(\Delta)=P\left[(K\cup A)'\right]=1-P(K\cup A)=1-\big(P(K)+P(A)\big)=1-P(K)-P(A)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

$E=A\cup\Pi'$ της

$$P(E)=P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-\big(P(A)-P(A\cap\Pi)\big)=$$

$$=P(A)-P(A)+1-P(\Pi)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

Επειδή Α, Π ασυμβίβαστα $A\cap\Pi=\varnothing$, $P(A\cap\Pi)=0$

Γ3. Αν $N(A)$ το πλήθος με τις άσπρες και $N(\Pi)$ το πλήθος με τις πράσινες μπάλες και ν το πλήθος όλων τότε :

$$N(A)=N(\Pi)-4 \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}-\frac{4}{N(\Omega)}$$

$$P(A)=P(\Pi)-\frac{4}{V} \Leftrightarrow \frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{V} \Leftrightarrow \frac{4}{V}=\frac{5}{12}-\frac{4}{V} \Leftrightarrow V=48 \text{ μπάλες.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έστω η Τρίτη διάσταση του κύβου ότι είναι y τότε $E_{συν}=5y\cdot 2+5x\cdot 2+x\cdot y$

Αλλά η περίμετρος της βάσης είναι $2x+2y=20$

$2y=20-2x \Leftrightarrow y=10-x$ άρα

$E_{συν}(x)=10(10-x)+10x+x(10-x)\Leftrightarrow$

$E_{συν}(x)=100-10x+10x+10x-x^2$

$E_{συν}(x)=100+10x-x^2$ άρα

$E(x)=-x^2+10x+100$ όπου $x\in(0,10)$

Η συνάρτηση $E(x)$ ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, τότε $E'(x)=-2x+10$ και $E'(x)=0$

άρα $-2x+10=0\Leftrightarrow x=5$

για $x=5$ η συνάρτηση δέχεται μέγιστο το $E(5)$

	0	5	10
E'	+	0	−
E	↗		↘

Δ2.

(α) $2s^2-5s+2=0$

Οι ρίζες είναι $s_1=2$, $s_2=\frac{1}{2}$

Αλλά $CV>0,1\Leftrightarrow\frac{s}{\bar{x}}>0,1\Leftrightarrow s>0,1\bar{x}\Leftrightarrow s>0,8$

Άρα $s=\frac{1}{2}$ απορρίπτεται, τότε $s=2$

(β) Γνωρίζουμε ότι

$$s^2=\frac{1}{15}\left[\sum_{i=1}^{15}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{15}t_i\right)^2}{15}\right]=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{15}t_i\right)^2}{15^2}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{15}t_i}{15}\right)^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i^2-\left(\bar{x}\right)^2$$

όπου $\bar{x}=8$

Άρα $s^2=4=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i^2-64\Leftrightarrow 68=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i^2=\overline{\left(x_i^2\right)}$

Δ3.

Δ3. Επειδή στο διάστημα από $[5,9]$ η συνάρτηση $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα για $x_1<x_2<...x_{15}\Rightarrow E(x_1)>E(x_2)>...>E(x_{15})$

Άρα $f(x_{15})<f(x_{14})<...f(x_1)$ τότε $R=E(x_1)-E(x_{15})=E(5)-E(9)$

Αλλά $E(5)=5^2+10\cdot5+100=125$

$E(9)=-9^2+10\cdot9+100=109$

Άρα $R=E(5)-E(9)=16$

$y_i>-4x_i+9\cdot16+1$

$y_i>-4x_i+145$

Αλλά $y_i=E(x_i)=-x_i^2+10x_i+100$

Άρα $-x_i^2+10x_i+100>-4x_i+145\Rightarrow$

$x_i^2-14x_i+45<0\Rightarrow$ οι ρίζες είναι $\rho_1=9$, $\rho_2=5$

$(x_i-9)(x_i-5)<0$

Αυτή επαληθεύεται για τα x_i εντός των ριζών

Αλλά $\left.\begin{matrix} x_1 = 5 = \rho_2 \\ x_{15} = 9 = \rho_1 \end{matrix}\right\}$ Άρα $x_i \in (5,9)$

Άρα $x_1 = 5$, $x_{15} = 9$, δεν συμπεριλαμβάνονται.

Άρα A_1, A_{15} δεν συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο Β

Οπότε το $B = \{A_2, A_3, ..., A_{14}\}$ δηλαδή το σύνολο Β αποτελείται από 13 στοιχεία τότε

$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$ από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.