ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται ο πίνακας

xi	Σχετική συχνότητα fi%
5	15
	40
	20
20	25

Με $\bar{x} = 12$ και s=5

α) να συμπληρωθεί ο πίνακας και

β) αν κάθε τιμή xi αυξηθεί κατά 30% και στη συνέχεια μειωθεί κατά 3 μονάδες να βρεθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας CV.

2ο ΘΕΜΑ

Έστω $t_1,\dots,t_\nu$ παρατηρήσεις με $\bar{x} = 30$ και S=5

α) να βρεθεί ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων

β) αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2 μονάδες πόσο θα μεταβληθεί ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων;

Δίνεται

$$S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu}\right\}$$

3ο ΘΕΜΑ

Έστω X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}\neq 0$ και τυπική απόκλιση S. Αν γνωρίζουμε ότι στο διάστημα που ορίζουν $\bar{x}$ και $\frac{1}{9}\bar{x}$ ανήκει το 47,5% των παρατηρήσεων. α) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

β) Αν $\bar{x}$ =10/9,να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που ανήκει στο διάστημα (50/81 , 170/81).

4ο ΘΕΜΑ

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $x_1,x_2,\dots,x_\nu$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=4x^2 -(\bar{x})^3 x+10s \quad x\in R$. Αν η g παρουσιάζει για x=1 ελάχιστο ίσο με g(1)= -1 τότε:

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε μια παρατήρηση ανάμεσα στο 1,7 και στο 2,3 αν η κατανομή είναι κανονική;

δ) Αυξάνουμε κάθε παρατήρηση κατά την ίδια ποσότητα λ>0. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ ώστε το δείγμα να είναι ομογενές.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} fi\ xi$ άρα $0,15\cdot 5+0,40\cdot x_2+0,20\cdot x_3+0,25\cdot 20=12$

$5,75+0,4x_2+0,2x_3=12 \Leftrightarrow 0,4x_2+0,2x_3=6,25 (1)$

Έστω ν το πλήθος των παρατηρήσεων

$$S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(xi-\bar{x})^2\cdot \nu i$$

$$S^2=\frac{1}{\nu}\left[\nu_1(5-12)^2+\nu_2(x_2-12)^2+\nu_3(x_3-12)^2+(20-12)^2\nu_4\right]$$

$$25=\frac{\nu_1}{\nu}\cdot(7)^2+\frac{\nu_2}{\nu}\cdot(x_2-12)^2+\frac{\nu_3}{\nu}\cdot(x_3-12)^2+\frac{\nu_4}{\nu}\cdot(8)^2$$

$25=0,15\cdot 49 + 0,4\cdot(x_2-12)^2 +0,2\cdot(x_3-12)^2 + 64\cdot 0,25$

$0,4(x_2-12)^2 +0,2\cdot(x_3-12)^2 =1,65$ (2)

Από τη λύση του συστήματος των (1), (2) έχουμε

$x_2 \approx 15,2$ ή $x_2 \approx 9,1$

$x_3 \approx 0,83$ $\quad x_3 \approx 13$

β) $yi=xi\ 0,3 - 3$, $\bar{y} = 0,3\bar{x} - 3=0,3\cdot 12-3=0,6$

$$S_y=0,3\cdot S_x=0,3\cdot 5=1,5$$

$$CV_y=\frac{1,5}{0,6}=2,5$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α)

$$S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu}\right\}\Leftrightarrow S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} ti^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} ti\right)^2}{\nu^2}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti}{\nu}\right)^2\Leftrightarrow 25=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}-30^2\Leftrightarrow 925=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} ti^2}{\nu}$$

β) Έστω yi= ti+2 τότε $\bar{y}=30+2=32$ και $S_y=S_x=5$ οπότε

$$S_y^2=\frac{\sum yi^2}{\nu}-\left(\frac{\sum yi}{\nu}\right)^2\Rightarrow 25=\frac{\sum yi^2}{\nu}-32^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25+1024=\frac{\sum yi^2}{\nu}\Rightarrow 1049=\frac{\sum yi^2}{\nu}$$

Άρα ο μέσος των τετραγώνων των παρατηρήσεων θα αυξηθεί κατά 1049 - 925=124 μονάδες.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων.

Άρα στο $(\bar{x}-2s, \bar{x})$ και στο $(\bar{x}, \bar{x}+2s)$ ανήκει το

$\frac{95\%}{2}=47,5\%$ των παρατηρήσεων.

Άρα $\bar{x}+2s=\frac{1}{9}\bar{x}\Leftrightarrow S=-\frac{8}{18}\bar{x}=-\frac{4}{9}\bar{x},\quad \bar{x}<0$ ή

$$\bar{x}-2s=\frac{1}{9}\bar{x}\Leftrightarrow S=\frac{8}{18}\bar{x}=+\frac{4}{9}\bar{x},\quad \bar{x}>0$$

$$CV=\frac{S}{|\bar{x}|}=\frac{-\frac{4}{9}\bar{x}}{-\bar{x}}=\frac{4}{9}=0,45 \quad \text{ή} \quad CV=\frac{\frac{4}{9}\bar{x}}{\bar{x}}=\frac{4}{9}$$

Άρα CV=0,45>0,10 άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) $\bar{x}=\frac{10}{9}$ άρα $S=\frac{4}{9}\cdot\frac{10}{9}=\frac{40}{81}$ οπότε $\frac{50}{81}=\frac{90}{81}-\frac{40}{81}=\bar{x}-s$

$$\frac{170}{81}=\frac{90}{81}+2\cdot\frac{40}{81}=\bar{x}+2\cdot s$$

Στο $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ ανήκει το 68% των παρατηρήσεων.

Στο $(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων.

Άρα στο $(\bar{x}+s,\bar{x}+2s)$ ανήκει το $\frac{95\%-68\%}{2}=13,5\%$ των παρατηρήσεων.

Άρα στο $(\bar{x}-s,\bar{x}+2s)$ ανήκει το 68% +13,5% = 81,5% των παρατηρήσεων.

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $g'(x)=8x-(\bar{x})^3$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για x=1 άρα g'(1)=0 οπότε: $8-(\bar{x})^3=0\Leftrightarrow\bar{x}=2$ και η ελάχιστη τιμή είναι g(1)= -1, οπότε: $4\cdot 1^2-2^3\cdot 1+1s=-1\Leftrightarrow -4+10s=-1\Leftrightarrow s=\frac{3}{10}$

β)

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\frac{3}{10}}{2}=\frac{3}{20}>\frac{2}{20}=0,1$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ) Παρατηρούμε ότι $[\bar{x}-s, \bar{x}+s]=[1,7, 2.3]$ και επειδή η κατανομή είναι κανονική η πιθανότητα μια παρατήρηση να ανήκει στο παραπάνω διάστημα είναι 68%.

δ) Αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά την ίδια ποσότητα λ>0 τότε η μέση τιμή του δείγματος θα γίνει $\bar{x}+\lambda$ ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμένει αμετάβλητη.

Το δείγμα είναι ομοιογενές όταν:

$$CV\le 0,1\Leftrightarrow\frac{s}{\bar{x}+\lambda}\le 0,1\Leftrightarrow\frac{\frac{3}{10}}{2+\lambda}\le 0,1\Leftrightarrow\frac{3}{20+10\lambda}\le 0,1$$

$$\Leftrightarrow 3\le 2+\lambda\Leftrightarrow\lambda\ge 1$$

Άρα η μικρότερη τιμή του λ είναι 1.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**