ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+4x+6 \quad x\in R$, $\alpha,\beta\in R$.
α) Να προσδιορίσετε τα α,β ώστε η συνάρτηση f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$, $x_2=-1$.
β) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης.

2ο ΘΕΜΑ

Αν η κατανομή των μισθών των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι κανονική και το 15,85% βρίσκεται στο διάστημα (550,850) και $\bar{x}>400$ να βρείτε:
α) Αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
β) Πόσο το λιγότερο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές;
γ) Το πλήθος ν των υπαλλήλων αν 68 υπάλληλοι παίρνουν μισθό από 1000 έως 1150 ευρώ.

3ο ΘΕΜΑ

Το σημείο Α(2,2) βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$, $x\in R$.
α) Να εκφράσετε το γ ως συνάρτηση του β
β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α είναι η ευθεία y=x, να βρείτε το β.
γ) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

4ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=3e^x+\ln(x+1)+3x-3$
α) Να βρεθεί το f(0)
β) Να βρεθεί το f΄(0)
γ) Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cdot e^h+\ln(h+1)+3h-3}{h}$
δ) Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται επάνω από τον x΄x.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+4$
Στα $x_1=1$ και $x_2=-1$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα άρα:
$f'(1)=0$ και $f'(-1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=-4\\ f'(-1)=0\Leftrightarrow 3\alpha-2\beta=-4\end{array}\right\}\Leftrightarrow 6\alpha=-8\Leftrightarrow \alpha=-\frac{4}{3}$$

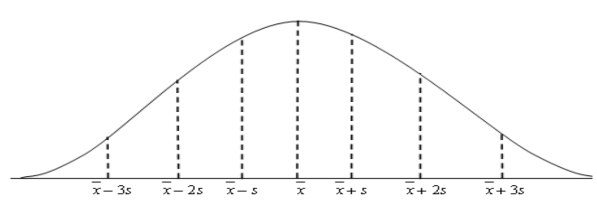
και $\beta=\dfrac{-4-3\alpha}{2}=\dfrac{-4+4}{2}=0$

β) Για α = - 4/3 και β = 0 έχουμε ότι: $f'(x)=-4x^2+4$
$f'(x)=0\Leftrightarrow -4x^2+4=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f΄(x)	-		+	-
f(x)	↘		↗	↘

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [-1, 1].

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ



Από την καμπύλη της κανονικής κατανομής παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $[\bar{x}-3s,\bar{x}-s]$ και $[\bar{x}+s,\bar{x}+3s]$ περιέχουν το 15.85% των παρατηρήσεων. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1η περίπτωση:

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}-3s=550\\ \bar{x}-s=850\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\bar{x}-3s=550\\ -\bar{x}+s=-850\end{array}\right.\Leftrightarrow -2s=-300$$

$\Leftrightarrow s=150$ και $\bar{x}=550+3s=550+450=1000$

2η περίπτωση:

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}+s=550\\ \bar{x}+3s=850\end{array}\right.\Leftrightarrow 2s=300\Leftrightarrow s=150 \text{ και } \bar{x}=400$$

Όμως πρέπει $\bar{x}>400$ άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση
Συνεπώς S = 150 και $\bar{x}=1000$

$$CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{150}{1000}=15\%>10\%$$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
β)Πρέπει

$$CV\le 0,1\Leftrightarrow\frac{S}{\bar{x}+C}\le 0,1\Leftrightarrow S\le\bar{x}\cdot 0,1+C\cdot 0,1\Leftrightarrow$$

$$C\ge\frac{S-\bar{x}\cdot 0,1}{0,1}=\frac{150-100}{0,1}=500$$

γ) Από 1000 έως 1150 Ευρώ έχω 68 υπαλλήλους. Δηλαδή το 34% των υπαλλήλων της εταιρείας είναι 68 υπάλληλοι
Οπότε

$V=\dfrac{68\cdot 100}{34}=200$ υπάλληλοι

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Εφόσον το σημείο Α(2,2) ανήκει στην γραφική παράσταση της f θα ισχύει:
$f(2)=2\Leftrightarrow 2^2+2\beta+\gamma=2\Leftrightarrow 2\beta+\gamma=-2\Leftrightarrow\gamma=-2-2\beta$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της y = x είναι 1 και εφόσον εφάπτεται με την γραφική παράσταση της f στο σημείο Α. θα ισχύει: $f'(2)=1$
Έχουμε $f'(x)=2x+\beta$ οπότε: $f'(2)=1\Leftrightarrow 2\cdot 2+\beta=1\Leftrightarrow$
$\beta=-3$

γ) Επειδή $\gamma=-2\beta-2$ και $\beta=-3$ θα είναι $\gamma=-2\cdot(-3)-2$
$\gamma=4$ άρα $f(x)=x^2-3x+4$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Πεδίο ορισμού f $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ άρα $x\in(-1,+\infty)$

$f(0)=3\cdot e^0+\ln 1+0-3=0$
β) $f'(x)=3\cdot e^x+\dfrac{1}{x+1}+3,\quad x\in(-1,+\infty)$
$f'(0)=3+1+3=7$
γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cdot e^h+\ln(h+1)+3h-3}{h}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cdot e^h+\ln(h+1)+3h-3}{h}$$

$f'(0)=7$ άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cdot e^h+\ln(h+1)+3h-3}{h}=7$

δ) Οι τιμές του x για τις οποίες γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον x΄x είναι οι τιμές του $x\in(-1,+\infty)$ που επαληθεύουν την $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)$ (1)
Αλλά $f'(x)=3e^x+\dfrac{1}{x+1}+3>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$
άρα η (1) $\Leftrightarrow x>0$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**