

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης

## 1° ΘΕΜΑ

Δίνεται η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση  $3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x) + 3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}]$

iii) Αν είναι  $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να βρείτε τον τύπο της  $g$

## 2° ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f$  στο  $[a, \beta]$  και οι μιγαδικοί  $z = f(\beta) - i\beta^2$  και  $w = f(a) + ia^2$  με  $|w + z| < |\bar{w} - z|$ . Να δείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ .

## 3° ΘΕΜΑ

Αν για την συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f^3(x) + f(x) + x = 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι:

i) Η  $f$  είναι συνάρτηση "1-1"

ii) Να βρείτε την  $f^{-1}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^x) = f(1-x)$

iv) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [(4 - f^{-1}(x)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}]$

## 4° ΘΕΜΑ

a) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} |z-2| + \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}, & x < 2 \\ |z+i| + x - \frac{5}{4}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$  να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  κινείται σε ευθεία της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση.

β) Από τους μιγαδικούς  $z$  του ερωτήματος (α) να βρεθεί εκείνος που έχει το ελάχιστο μέτρο

## ΛΥΣΕΙΣ

### ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i) Δίνεται ότι  $3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Θέτουμε όπου  $x$  το  $-x$  και έχουμε  $3 \cdot f(-x) - 2 \cdot f(x) = -5x - 3$ , όπου λύνουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} 3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3 \\ 3 \cdot f(-x) - 2 \cdot f(x) = -5x - 3 \end{cases} \text{ και παίρνουμε}$$

$f(x) = x - 3$

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x) + 3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 3 + 3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}, \text{ θέτω } \frac{1}{x} = u \text{ οπότε}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

iii) Δίνεται  $g \circ f(x) = x^2 + 1$   
 $g(f(x)) = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x-3) = x^2 + 1 \xrightarrow{x-3=\omega} g(\omega) = \omega^2 + 6\omega + 10$ . Άρα  $g(x) = x^2 + 6x + 10$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

### ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$|w + z| < |\bar{w} - z| \Leftrightarrow$$

$$|f(a) + ia^2 + f(\beta) + i\beta^2| < |f(a) - ia^2 - f(\beta) + i\beta^2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(f(a) + f(\beta)) + i(\alpha^2 + \beta^2)| < |(f(a) - f(\beta)) + i(\beta^2 - \alpha^2)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(f(a) + f(\beta))^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2} < \sqrt{(f(a) - f(\beta))^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow f^2(a) + f^2(\beta) + 2f(a)f(\beta) + \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 < f^2(a) + f^2(\beta) -$$

$$- 2f(a)f(\beta) + \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow 4f(a)f(\beta) < -4\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(a)f(\beta) < -\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow f(a)f(\beta) < 0$$

Η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο  $[a, \beta]$  άρα υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = 0$

### ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i)  $f^3(x) + f(x) + x = 4$  άρα  $f^3(x) + f(x) = 4 - x$  (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  έχουμε

$$\left. \begin{aligned} f^3(x_1) &= f^3(x_2) \\ f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned} \right\} \text{ (+) αρα } f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$4 - x_1 = 4 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι "1-1".

ii) Αν θέσουμε  $y = f(x)$  τότε η  $f^3(x) + f(x) + x = 4$  γίνεται  $y^3 + y + x = 4 \Leftrightarrow x = 4 - y^3 - y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 4 - y^3 - y$  ή  $f^{-1}(x) = -x^3 - x + 4, x \in \mathbb{R} (f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$ .

iii)  $f(e^x) = f(1-x)$

Επειδή η  $f$  είναι "1-1" άρα  $e^x = 1-x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0$

Προφανής ρίζα  $x=0$  διότι  $e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Η συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = e^x + x - 1$  είναι γνήσια αύξουσα διότι για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$\text{και } e^{x_1} < e^{x_2}$$

προσθέτοντας κατά μέλη έχω

$$e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2),$$

άρα η  $h$  είναι "1-1" οπότε  $x=0$  μοναδική ρίζα.

iv) Είναι

$$(4 - f^{-1}(x)) \eta\mu \frac{1}{x} = (4 + x^3 + x - 4) \eta\mu \frac{1}{x} = (x^3 + x) \eta\mu \frac{1}{x}$$

ισχύει

$$|(x^3 + x) \eta\mu \frac{1}{x}| \leq |x^3 + x| \Leftrightarrow -|x^3 + x| \leq (x^3 + x) \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x^3 + x|$$

$$\leq |x^3 + x|$$

το  $\lim_{x \rightarrow 0} |x^3 + x| = 0$ ,

άρα από κριτήριο παρεμβολής και  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x) \eta\mu \frac{1}{x} = 0$

### ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

a) Αφού  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 2$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$  (1)

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( |z-2| + \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} \right) =$$

$$= |z-2| + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = |z-2| + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x+2} = |z-2| + \frac{3}{4}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( |z+i| + x - \frac{5}{4} \right) = |z+i| + 2 - \frac{5}{4} = |z+i| + \frac{3}{4} = f(2)$$

Άρα λόγω της (1) θα πρέπει

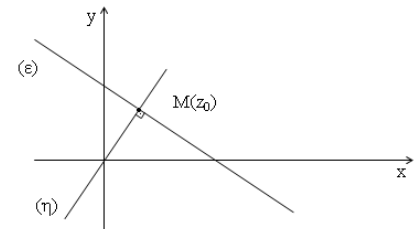
$$|z-2| + \frac{3}{4} = |z+i| + \frac{3}{4} \Leftrightarrow |z-2| = |z+i| \Leftrightarrow$$

$$|(x-2) + yi| = |x+(y+1) - i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$4x + 2y - 3 = 0$$

**Σχόλιο:** Η εικόνα του  $z$  κινείται στη μεσοκάθετη του τμήματος  $AB$  όπου  $A(2,0), B(0,-1)$  που είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1 = 2+0i, z_2 = 0-1i$  βάσει της ισότητας  $|z-2| = |z+i|$ .

β)



$$(η) \perp (ε) \Leftrightarrow \lambda_\epsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = 1/2$$

$$\text{άρα } (η) : y = 1/2 \cdot x$$

$$\text{Λύνω το } (\Sigma) \begin{cases} 4x + 2y - 3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = 3/10 \end{cases}$$

άρα ο  $z_0 = \frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$  έχει το ελάχιστο μέτρο

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΧΑΣΙΑΚΗΣ**  
ΣΤΟΝ ΠΕΙΡΑΙΑ