ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

α) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $e^{|z-i|\cdot x} \geq |z+1| \cdot x+1$, για κάθε $x\in R$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α,β ώστε C_f να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α), όπου $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{x + 1}$

γ) Για τις τιμές των α,β που βρήκατε, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών x=0 και x=2.

2ο ΘΕΜΑ

α) Να βρεθεί ο τύπος της θετικής και παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο R αν ισχύουν οι σχέσεις:
$f'(x) \cdot f(\alpha-x) = \beta>0$, για κάθε $x\in R$, f(0)=1, $f'(0) = 2$

β) Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της συνάρτησης h(x) = f(x)+x και να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης h(x)=0

γ) Έστω ο μιγαδικός $z(x)=x+e^x\cdot i$, $x\in R$. Να εξετάσετε αν το μέτρο του z(x) λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν για κάθε $x \in R^*$ ισχύει $10f(x) + xf'(x) > 11x$ (1) να δείξετε ότι για κάθε $x\in R$ είναι $f(x) \geq x$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Δίνεται ότι $e^{|z-i|\cdot x} \geq |z+1| \cdot x+1 \Leftrightarrow e^{|z-i|\cdot x} - |z+1| \cdot x-1 \geq 0.$

Θεωρούμε ότι $g(x) = e^{|z-i|\cdot x} - |z+1| \cdot x-1$, άρα ισχύει

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$

Άρα η g εμφανίζει ελάχιστο στο x=0 οπότε από θεώρημα Fermat ισχύει $g'(0) = 0$

Είναι $g'(x) = e^{|z-i|\cdot x} \cdot |z-i| - |z+1|$ άρα

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow |z-i| = |z+1| \overset{z = x + yi}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \cdot$$

$\Leftrightarrow y= -x$

β) Η y=-x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άρα ισχύουν οι ισότητες: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda = -1$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - \lambda \cdot x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)+x) = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{(x+1) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$$

άρα α= -1.

Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)+x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{(x+1)} + x\right) =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2 + 2\beta x - 3+x^2 +x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(2\beta+1)x - 3}{x+1} =$$

$= \dfrac{2\beta+1}{1} = 2\beta+1$ άρα $2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{1}{2}$.

γ) Για α= -1, $\beta = -\dfrac{1}{2}$ η $f(x) = \dfrac{-x^2-x-3}{x+1} = -\dfrac{x^2+x+3}{x+1} < 0$, για κάθε $x\in [0,2]$.

Άρα

$$E(\Omega) = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 -\frac{x^2+x+3}{x+1}dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2+x+3}{x+1}dx = \int_0^2 \frac{x(x+1)+3}{x+1}dx =$$

(Σχόλιο:θα μπορούσε να γίνει και διαίρεση)

$$= \int_0^2 \left(x+\frac{3}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3\ln(x+1)\right]_0^2 = 2+3\ln 3$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Ισχύει ότι $f'(x)\cdot f(\alpha-x) = \beta$ (I), για κάθε $x\in R$, άρα θέτω όπου x το α-x, και έχουμε: $f'(\alpha-x) \cdot f(x) = \beta$ (II).

Εκ των (I), (II) $\Rightarrow f'(x) \cdot f(\alpha-x) - f'(\alpha-x)\cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[f(x)\cdot f(\alpha-x)\right]' = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f(\alpha-x) = c$ (III) όπου c>0)

Διαιρώ κατά μέλη τις I, III οπότε προκύπτει:

$$\frac{f'(x) \cdot f(\alpha-x)}{f(x) \cdot f(\alpha-x)} = \frac{\beta}{c} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{c} = \kappa \Leftrightarrow f'(x) = \kappa \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x) = c_1 \cdot e^{\kappa\cdot x}$

<u>Προσδιορισμός των c_1, κ</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{Για } x=0\text{: } f(0)=c_1 \Leftrightarrow 1=c_1 \\ \text{Για } x=0\text{: } f'(0)=\kappa\cdot f(0) \Leftrightarrow 2=\kappa\end{array}\right\} f(x) = e^{2x}$$

β) Η $h(x) = f(x)+x = e^{2x}+x$

Μονοτονία: $h'(x) = 2e^{2x}+1>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

οπότε

$$h(A) = \left(\lim_{x\to -\infty} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$$

Παρατηρώ ότι το μηδέν $\in h(A)$ άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_o\in R$: $h(x_o) = 0$.

Και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική

γ) $z(x)=x+e^x\cdot i$ άρα $|z(x)| = \sqrt{x^2+(e^x)^2} = \sqrt{x^2+e^{2x}}$

Θ ε ω ρ ώ

$g(x)=x^2+e^{2x}$ άρα $g'(x)=2x+2e^{2x} = 2(x+e^{2x}) = 2h(x)$

Είναι $g'(0)=0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow x=x_o$

Οπότε για $x>x_o$ είναι $g'(x) > g'(x_o) \Leftrightarrow g'(x) > 0$

για $x<x_o$ είναι $g'(x) < g'(x_o) \Leftrightarrow g'(x) < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	MIN	↗

Οπότε η g εμφανίζει min στο x_o με τιμή $g(x_o)$. Άρα το $|z(x)| \geq |z(x_o)|$, για κάθε $x\in R$.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η (1) για x>0 γίνεται $10x^9\cdot f(x) + x^{10} \cdot f'(x) > 11x^{10}$

$$\Leftrightarrow (x^{10})'\cdot f(x) + x^{10}\cdot f'(x) > (x^{11})' \Leftrightarrow (x^{10}\cdot f(x))' - (x^{11})' > 0$$

$\Leftrightarrow (x^{10}\cdot f(x) - x^{11})' > 0$ (2)

ενώ για x<0 γίνεται $(x^{10}\cdot f(x) - x^{11})' < 0$ (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = x^{10}\cdot f(x) - x^{11}$ $x\in R$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R οπότε η g είναι συνεχής στο R. Από τις (2), (3) έχουμε ότι για κάθε x<0 είναι $g'(x) < 0$ και για κάθε x>0 είναι $g'(x) > 0$.

Οπότε g είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησια αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και έτσι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_o=0 με g(0)=0.

Άρα

$g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^{10}f(x)-x'' \geq 0 \Leftrightarrow f(x)-x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq x$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**