



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ.60

A2. Οι συντεταγμένες των σημείων είναι:

$$A(1,0), B(0,1), \Gamma(1,1), \Delta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), E\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), Z(\sqrt{3},1)$$

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,-16)$ ισχύει ότι:

$$f(2) = -16 \Leftrightarrow 8 - 2\kappa = -16 \Leftrightarrow -2\kappa = -24 \Leftrightarrow \kappa = 12$$

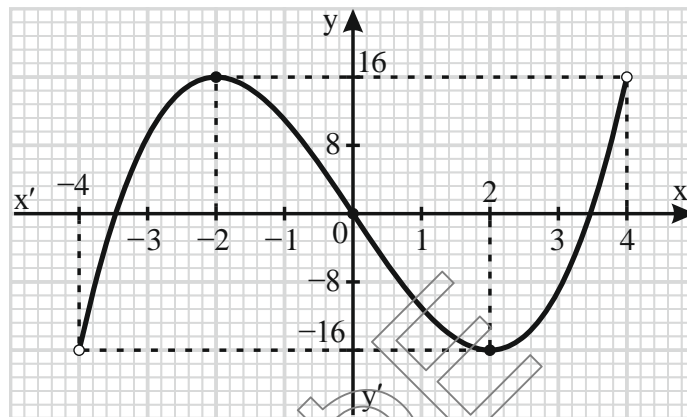
Άρα, $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in (-4, 4)$.

B2. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-4, 4)$, ισχύει $-x \in (-4, 4)$.

Επίσης, $f(-x) = (-x)^3 - 12(-x) = -x^3 + 12x = -(x^3 - 12x) = -f(x)$, $x \in (-4, 4)$

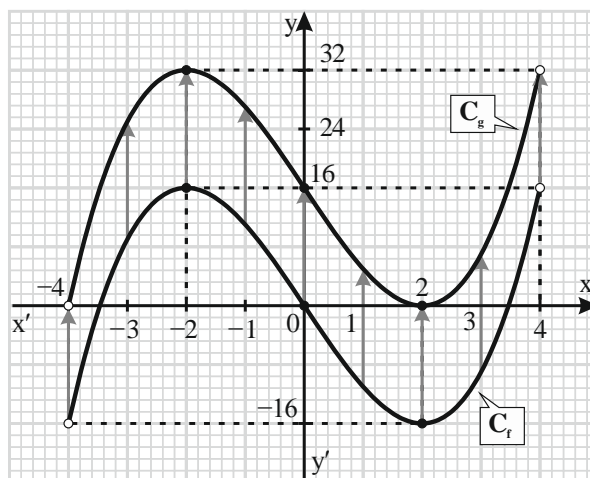
Επομένως, η f είναι περιττή.

- B3.** Αφού η f είναι περιττή στο $(-4,4)$ τότε η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Οπότε, η γραφική παράσταση της f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- B4.** Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι:
 Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-4, -2]$ και $[2, 4)$.
 Επίσης, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 2]$.
 Τέλος, η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_1 = -2$ το $f(-2) = 16$ και ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$ το $f(2) = -16$.

- B5.** Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 12x$ κατά 16 μονάδες προς τα πάνω. Το γράφημα της g δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω ότι υπάρχει γωνία $\omega \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = 1$.

Τότε σύμφωνα με την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

είναι $1^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ που είναι άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχει γωνία $\omega \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = 1$.

Γ2.

α. Είναι $\begin{cases} 10y^2 = 9x + 1 \\ 9x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 = 9x + 1 & (1) \\ 9x = 2y + 7 & (2) \end{cases}$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$10y^2 = 2y + 7 + 1 \Leftrightarrow 10y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 1 + 80 = 81$$

Επομένως, $y_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{10}{10} = 1 \\ y_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Από τη σχέση (1):

- για $y = 1$ είναι $9x = 2 + 7 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$
- για $y = -\frac{4}{5}$ είναι $9x = -\frac{8}{5} + 7 \Leftrightarrow 9x = -\frac{8}{5} + \frac{35}{5} \Leftrightarrow 9x = \frac{27}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$

Οπότε, οι λύσεις (x, y) του συστήματος είναι οι $(1, 1)$ και $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

β. Σύμφωνα με τα δεδομένα είναι $\eta\mu\alpha = x_0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = y_0$, όπου (x_0, y_0) μία από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος.

Αν $(x_0, y_0) = (1, 1)$ τότε $\eta\mu\alpha = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = 1$, το οποίο λόγω του ερωτήματος Γ1, απορρίπτεται.

Άρα, $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Οπότε, $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$.

Επίσης, είναι $\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ και $\sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

γ. Είναι:

- $\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha,$
- $\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha,$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = -\eta\mu(-\alpha) = \eta\mu\alpha,$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην παράσταση Α είναι

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{3}{5}\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha \\
 &= \frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{3}{5}\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha \\
 &= -\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = -\frac{9}{25} + \frac{9}{25} = 0
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

- $\eta\mu(\omega + 50^\circ) = \eta\mu(90^\circ - (40^\circ - \omega)) = \sigma\upsilon\nu(40^\circ - \omega)$
- $\epsilon\varphi(65^\circ + \omega) = \epsilon\varphi(90^\circ - (25^\circ - \omega)) = \sigma\varphi(25^\circ - \omega)$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην παράσταση είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \eta\mu^2(40^\circ - \omega) + \epsilon\varphi(25^\circ - \omega) \cdot \sigma\varphi(25^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu^2(40^\circ - \omega) + 1 = \\
 &= \eta\mu^2(40^\circ - \omega) + 1 + \sigma\upsilon\nu^2(40^\circ - \omega) + 1 = 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

Επομένως, $f(x) = \beta \cdot \eta\mu(3x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{71\pi}{9}, -\sqrt{3}\right)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{71\pi}{9}\right) = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(3 \cdot \frac{71\pi}{9}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(\frac{71\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(\frac{72\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(24\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow -\beta \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta = 2 \end{aligned}$$

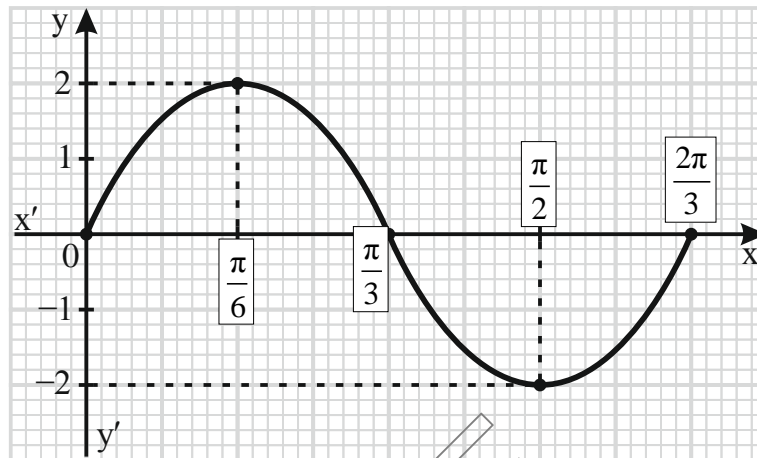
Άρα, $f(x) = 2\eta\mu(3x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(3x)$, έχει:

- μέγιστη τιμή ίση με: $|2| = 2$,
- ελάχιστη τιμή ίση με: $-|2| = -2$
- και περίοδο ίση με: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

Έχοντας υπόψιν τα παραπάνω στοιχεία και με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu(3x)$, $x \in \mathbb{R}$, σε πλάτος μίας περιόδου.

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\eta\mu(3x)$	0	1	0	-1	0
$2 \cdot \eta\mu(3x)$	0	2	0	-2	0



Δ4. Είναι:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu(3x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 3x = 2κ\pi + x + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{2} - 3x = 2κ\pi - x - \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} , κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -4x = 2κ\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ -2x = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} , κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -4x = 2κ\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ -2x = 2κ\pi - \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} , κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{κ\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \\ \text{ή} \\ x = -κ\pi + \frac{5\pi}{12} \end{array} \right\} , κ \in \mathbb{Z}$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ