



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ ισούται με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $υ = P(\rho)$.

Μονάδες 10

Α2. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας, σωστά συμπληρωμένες τις παρακάτω ισότητες

(α) $\ln e^{-\theta} =$

(β) $e^{\ln \theta} =$ για κάθε $\theta > 0$

(γ) $\ln 1 =$

(δ) $\ln \frac{1}{e} =$

(ε) $\ln^2 e^2 =$

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται άρτια όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

(β) Ισχύει $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$.

(γ) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

(δ) Αν ο ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τότε είναι κατ' ανάγκη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha - \beta \eta\mu \frac{x}{2}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3\pi, 3)$ και ισχύει $f(\pi) = -1$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Μονάδες 4

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) + 4 = 4f(x)$ με $x \in [0, T]$ όπου T η περίοδος της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

B4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta\mu \frac{39\pi}{2} - e$ έχει λύση στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Παρακάτω φαίνεται ένα ελλειπές σχήμα Hornerόπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το οποίο παριστάνει τη διαίρεση ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το πολυώνυμο $x - 1$.

| | | | | | |
|----------|----|----|-----|---------|---|
| α | -8 | 22 | -24 | β | 1 |
| | | | | | |
| | | 15 | | 0 | |

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 9$ (5 Μονάδες) και ότι το πολυώνυμο έχει τύπο $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$ (1 Μονάδα).

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ3. (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = 1 + \frac{f(x)}{x^2 - 4x + 3}$.

Μονάδες 2

(ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 5

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση

$$[f(2)]^x + 3 \cdot [f(4)]^{2x} = 4[f(0)]^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΛ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \text{ και } g(x) = \ln(e^{x^2} - 1) - 2\ln x.$$

Δ1. (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

(ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Μονάδες 4

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) - f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln 2, x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) + \ln x > g(x) + \ln x^2$.

Μονάδες 5

Δ4. (i) Να δείξετε ότι $f(x) = f(-x) + x$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 3

(ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2018)$ και $f(-2018)$.

Μονάδες 3