

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217
- A2.** (α) Ψευδής
(β) Για την συνάρτηση $f(x) = x^4$, επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο \mathbb{R} .
Εντούτοις η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο \mathbb{R} αφού $f''(0) = 0$
- A3.** Το (γ) είναι το ψευδές συμπέρασμα.
- A4.** (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x-2) - (2x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{5}{(x-2)^2}$$

Άρα $f'(x) < 0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 2)$, $A_2 = (2, +\infty)$

Επομένως η f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα το σύνολο τιμών της είναι :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

διότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left((2x+1) \frac{1}{x-2} \right) = 5 \cdot (-\infty) = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$ και $x-2 < 0$ για $x < 2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2 άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right) = (2, +\infty) \text{ διότι:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left((2x+1) \frac{1}{x-2} \right) = 5 \cdot (+\infty) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ και $x-2 > 0$ για $x > 2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\text{Άρα } f(A) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

B2. Επειδή τα σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους άρα η f είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f άρα για κάθε $x \neq 2$ έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = yx-2y \Leftrightarrow 2x-yx = -1-2y$$

$$\Leftrightarrow x(2-y) = -1-2y \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-2}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$$

Παρατήρηση: Το ερώτημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί και χωρίς τη βοήθεια του B1, αποδεικνύοντας ότι η f είναι 1-1 : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots x_1 = x_2$ και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης λύνοντας την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x παίρνοντας τους κατάλληλους περιορισμούς για το y .

$$\text{B3. } f''(x) = \left(\frac{-5}{(x-2)^2} \right)' = \frac{10(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{10}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(x-2)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

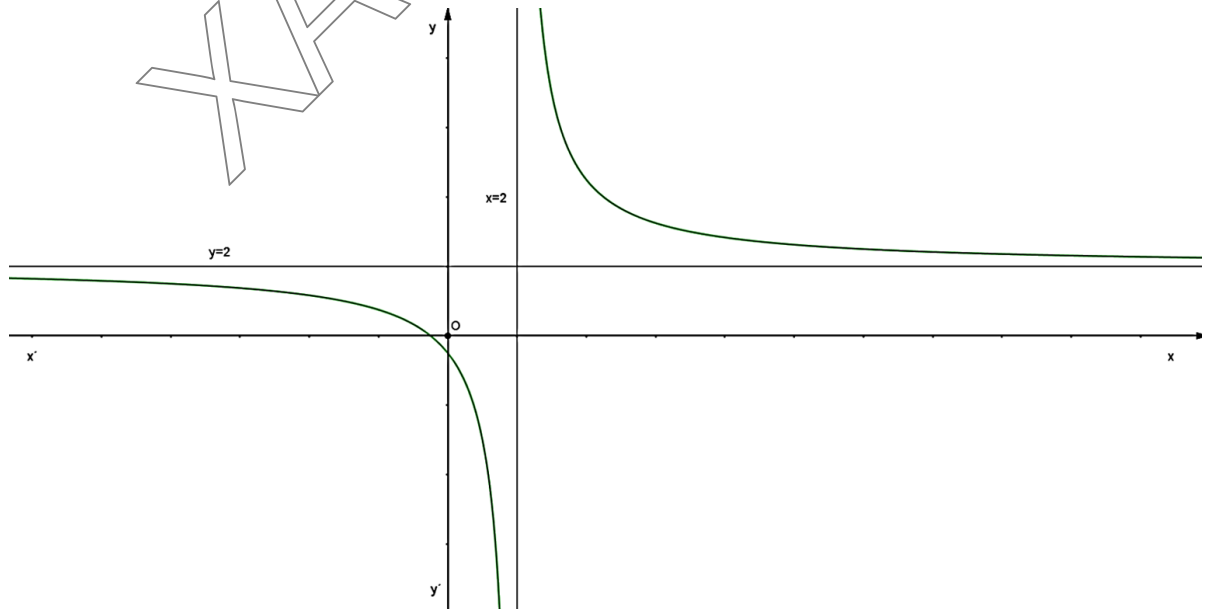
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(x-2)^3} < 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Στο διάστημα $(-\infty, 2)$ η f κοίλη ενώ στο διάστημα $(2, +\infty)$ η f κυρτή.

Από το **B1**, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ επομένως η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Από το **B1**, έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ άρα η ευθεία $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $(-\infty)$ και στο $(+\infty)$

Η γραφική της παράσταση είναι:



B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - 2 \Leftrightarrow h(x) = \frac{2x+1}{x-2} - 2 \Leftrightarrow h(x) = \frac{5}{x-2}, x \neq 2$$

Ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [3, 5]$ και είναι συνεχής στο διάστημα αυτό άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_3^5 h(x) dx = \int_3^5 \frac{5}{x-2} dx = \left[5 \ln(x-2) \right]_3^5 = 5 \ln 3 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 (α) Η $f(x) = a^{x-1} = \frac{1}{a} a^x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{1}{a} a^x \ln a \text{ και } f''(x) = \frac{1}{a} a^x \ln^2 a$$

Προφανώς $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f κυρτή.

A-τρόπος

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f , η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Εφόσον η $y = x$ είναι η εφαπτομένη της f τότε οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία μόνο λύση λόγω κυρτότητας της f .

$$f'(x_0) = 1 \text{ και } f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$$

Δηλαδή: $f'(x_0) = 1$ (1) και $f(x_0) = x_0$ (2)

Η εξίσωση (2) $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow a^{x_0-1} = x_0$, προφανής ρίζα $x_0 = 1$ η οποία είναι μοναδική εφόσον η f κυρτή και η $y = x$ είναι η εφαπτομένη της.

$$\text{και } f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

B-τρόπος

Η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της θα βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Έχουμε $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής $x_0 = 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = a^{x-1} - x, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό και παρατηρούμε ότι $\varphi(1) = 0$, δηλαδή $\varphi(x) \geq \varphi(1)$

Άρα η φ παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 1$, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με $\varphi'(x) = \frac{1}{a} a^x \ln a - 1$ άρα από θεώρημα Fermat $\varphi'(1) = 0$.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{1}{a} a^1 \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = e$$

Γ-τρόπος

Επειδή εφάπτονται υπάρχει σημείο $(x_0, f(x_0))$ ώστε :

$$\begin{cases} f(x_0) = x_0 \\ f'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x_0-1} = x_0 \\ a^{x_0-1} \ln a = 1 \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x_0-1} = x_0 \Leftrightarrow a^{x_0} = ax_0 \\ x_0 \ln a = 1 \Leftrightarrow a^{x_0} = e \Leftrightarrow e \ln a = a \end{cases} \quad (1)$$

Η εξίσωση $e \ln a = a$ έχει προφανή ρίζα $a = e$ και επειδή η συνάρτηση $m(x) = e \ln x - x$ παρουσιάζει στη θέση $x = e$ μέγιστο το μηδέν η ρίζα είναι μοναδική.

Αιτιολόγηση

$$m'(x) = \frac{e}{x} - 1 \text{ και}$$

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$m'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} > 1 \Leftrightarrow x < e$$

$$m'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e}{x} < 1 \Leftrightarrow x > e$$

Δηλαδή η συνάρτηση $m(x)$ έχει μέγιστη τιμή την $m(e) = 0$

(β) Η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x+1}$ και
 $g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ άρα η g κοίλη στο $(-1, +\infty)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο $x = 0$ είναι: $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$

$$g(0) = \ln 1 = 0, g'(x) = \frac{1}{x+1} \text{ άρα } g'(0) = 1$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y = x$

Γ2. Η $h(x) = e^{x-1} - (x+1)\ln(x+1) + x$ παραγωγίσιμη στο $A = (-1, +\infty)$ με
 $h'(x) = e^{x-1} - \ln(x+1) = f(x) - g(x)$

Α-τρόπος

Η g κοίλη επομένως $g(x) \leq x$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$ άρα
 $g(x) \leq x \leq f(x)$ επομένως $f(x) - g(x) > 0$ δηλαδή η h γνησίως αύξουσα.

Β-τρόπος

- Ισχύει $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$
άρα $e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$
- Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$
άρα $\ln(x+1) \leq x$ για κάθε $x > -1$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$
με βάση τα παραπάνω $\ln(x+1) \leq x \leq e^{x-1}$ για κάθε $x > -1$
επομένως $f(x) - g(x) > 0$ δηλαδή η h γνησίως αύξουσα στο
 $A = (-1, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 e^{e^x} - e(e^x + 1)\ln(e^x + 1) + e^{x+1} &> e^{ex} - e(ex + 1)\ln(ex + 1) + e^2x \\
 \Leftrightarrow e^{e^{x-1}} - (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + e^x &> e^{ex-1} - (ex + 1)\ln(ex + 1) + ex \\
 \Leftrightarrow h(e^x) > h(ex) \stackrel{\text{ηγνη.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} e^x > ex &\Leftrightarrow e^{x-1} > x \Leftrightarrow f(x) > x \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)
 \end{aligned}$$

Γ3. Η εξίσωση $x^3 + \int_0^1 x f(t^2) dt = \int_0^{e-1} g(t) dt$ ισοδύναμα γράφεται:

$$x^3 + \int_0^1 x f(t^2) dt = \int_0^{e-1} g(t) dt \Leftrightarrow x^3 + x \int_0^1 f(t^2) dt = \int_0^{e-1} \ln(t+1) dt$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x \int_0^1 f(t^2) dt = 1 \Leftrightarrow x^3 + x \int_0^1 f(t^2) dt - 1 = 0$$

Διότι:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{e-1} \ln(t+1) dt &= \int_0^{e-1} (t+1)' \ln(t+1) dt = [(t+1)\ln(t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} (t+1) \frac{1}{t+1} dt \\
 &= e - [t]_0^{e-1} = e - e + 1 = 1
 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = x^3 + x \int_0^1 f(t^2) dt - 1$ η οποία είναι συνεχής στο

$[0,1]$ ως πολυωνυμική με $k(0) = -1 < 0$ και $k(1) = \int_0^1 f(t^2) dt > 0$

Διότι $f(x) = e^{x-1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και $f(x^2) = e^{x^2-1} > 0$ οπότε $\int_0^1 f(t^2) dt > 0$

Επομένως από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$ και λόγω μονοτονίας $k'(x) = 3x + \int_0^1 f(t^2) dt > 0$ η ρίζα μοναδική.

- Γ4. $\alpha'(t) = 2 \Leftrightarrow \alpha(t) = 2t + c$ και επειδή $\alpha(0) = 0$ άρα $\alpha(t) = 2t$
 $\beta'(t) = 1 \Leftrightarrow \beta(t) = t + c_1$ και επειδή $\beta(0) = 3$ άρα $\beta(t) = t + 3$

Το ζητούμενο εμβαδόν με βάση το σχήμα είναι

$$E = \int_{2t}^{t+3} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2t}^{t+3} = \frac{(t+3)^2}{2} - \frac{(2t)^2}{2} = \frac{-3t^2 + 6t + 9}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 6t + 9), t \in [0, 3]$$

Το εμβαδό γίνεται ισό με το μηδέν όταν:

$$E(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-3t^2 + 6t + 9) = 0 \Leftrightarrow t = 3, t \in [0, 3]$$

ή εναλλακτικά: Το εμβαδόν γίνεται μηδέν όταν $\alpha(t) = \beta(t) \Leftrightarrow t = 3$

Για να βρούμε το μέγιστο:

$$E'(t) = \frac{1}{2}(-6t + 6), t \in (0, 3)$$

$$E'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 6 > 0 \Leftrightarrow t < 1, t \in (0, 3)$$

$$E'(t) < 0 \Leftrightarrow -6t + 6 < 0 \Leftrightarrow t > 1, t \in (0, 3)$$

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 1$ το εμβαδό γίνεται μέγιστο

Παρατήρηση: Η συνάρτηση του εμβαδού θα μπορούσε να υπολογιστεί θεωρώντας το σχήμα τραπέζιο με μεγάλη βάση το $\beta(t)$, μικρή βάση το $\alpha(t)$ και ύψος τη διαφορά $\beta(t) - \alpha(t)$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και συνεχής επομένως θα είναι συνεχής στο $x = 1$

$$\text{άρα θα ισχύει: } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Οπότε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \ln x}{1} = 1$$

Εφόσον παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε ισχύει :

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Οπότε:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x \ln x}{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon : y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

Για $x < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-f(x)}(1-f'(x)) \Rightarrow f'(x) = f(x)(1-f'(x)) \\ \Rightarrow f'(x) &= f(x) - f(x)f'(x) \Rightarrow f'(x)(1+f(x)) = f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1} > 0 \end{aligned}$$

Εφόσον το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$

$$\text{Για } x > 1 : f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x - 1) - x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{-\ln x + x - 1}{(x - 1)^2} = -\frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2} > 0$$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ άρα για κάθε $x > 1$ ισχύει : $\ln x < x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 < 0$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $\varphi(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$, $x \geq 1$

Η φ παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $\varphi'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x = 2(\ln x - x + 1) < 0$ για κάθε $x > 1$ και επειδή η φ συνεχής στο $x = 1$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ άρα για $x \geq 1 \Rightarrow \varphi(x) \leq 0$.

$$x > 1: f''(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)(x-1)^2 - 2(x-1)(\ln x - x + 1)}{(x-1)^4} = -\frac{(x-1)^2 - 2x(\ln x - x + 1)}{(x-1)^3} =$$

$$= -\frac{x^2 - 2x \ln x - 1}{x(x-1)^3} = \frac{-x^2 + 2x \ln x + 1}{x(x-1)^3} = \frac{\varphi(x)}{x(x-1)^3} < 0$$

$$x < 1: f''(x) = \frac{f'(x)(f(x)+1) - f'(x)f(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} > 0$$

Η f κυρτή στο $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο $[1, +\infty)$

Δ3. $2019 \in f(A) \Rightarrow$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = 2019$ το x_0 είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα αντικαθιστώντας $x = x_0$ στη σχέση $0 \leq g(x) \leq (f(x) - 2019)^2$

Προκύπτει: $g(x_0) = 0$ άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(x_0, 0)$, επίσης $g(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα στη θέση $x = x_0$ η g έχει ελάχιστο οπότε από θεώρημα Fermat: $g'(x_0) = 0$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο σημείο M είναι η $y = 0$ άρα ο $x'x$ εφάπτεται στην C_g

Δ4 Θέτω $x^2 = t$ επομένως $2x dx = dt$ άρα

$$\int_0^1 \frac{2tf(t)}{(f(t)+1)^3} dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 2tf''(t) dt = 2 \left([tf'(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t) dt \right) =$$
$$= 2(f'(1) - f(1) + f(0)) = 2f(0) - 1$$

(*) $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$, άρα : $f''(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{\frac{f(x)}{f(x)+1}}{(f(x)+1)^2} = \frac{f(x)}{(f(x)+1)^3}$

ΧΑΡΙΣΙΑΚΗ