ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 90.

Α2. **α.** (1→β)

β. (2→α)

γ. (3→δ)

Α3. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\alpha=\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\left(2\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$\alpha=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+2^2-\left[\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\cdot2\sqrt{3}+1\right]$$

$$\alpha=3+4\cdot\sqrt{3}+4-4\cdot3-4\cdot\sqrt{3}-1$$

$$\alpha=3+4-12-1$$

$$\alpha=7-13$$

$$\alpha=-6$$

Β2.

$$\frac{|\beta+1|+2}{3}-\frac{|\beta+1|-1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$6\cdot\frac{|\beta+1|+2}{3}-6\cdot\frac{|\beta+1|-1}{6}=6\cdot\frac{5}{6}$$

$$2\left(|\beta+1|+2\right)-\left(|\beta+1|-1\right)=5$$

$$2|\beta+1|+4-|\beta+1|+1=5$$

$$|\beta+1|=0$$

$$\beta+1=0$$

$$\beta=-1$$

Β3.

Έχουμε $S=-6-1=-7$, $P=(-6)\cdot(-1)=6$

Η εξίσωση είναι $x^2+7x+6=0$

Β4.

$|x+\alpha|+\beta<0$

$|x-6|-1<0$

$|x-6|<1$

$-1<x-6<1$

$5<x<7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Έχουμε $A=0$

$x^2-3x+2=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)\pm1}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}$ Άρα $x_1=2$ και $x_2=1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$-$		$+$	

Άρα $A \succ 0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

και $A\prec 0$ για κάθε $x\in(1,2)$

ii) Για να είναι πραγματικός αριθμός ο $\sqrt{-A}$ θα πρέπει $-A\geq 0$ δηλαδή $A\leq 0$ άρα πρέπει $x\in[1,2]$

Γ2. i) Έχουμε

$1\leq x\leq 2$

$1-3\leq x-3\leq 2-3$

$-2\leq x-3\leq -1$

Άρα $x-3\prec 0$

Ακόμα

$1 \le x \le 2$

$1+3 \le x+3 \le 2+3$

$4 \le x+3 \le 5$

Άρα $x+3 \succ 0$

Συνεπώς $|x-3|-|x+3| = -x+3-(x+3) = -x+3-x-3 = -2x$

ii) Έχουμε

$\sqrt{-A} = |x-3|-|x+3|$

$\sqrt{-A} = -2x$ Αδύνατη , διότι

$1 \le x \le 2$

$-2 \ge -2x \ge -4$

$-4 \le -2x \le -2$

Δηλαδή $-2x \prec 0$

Γ3 Έχουμε

$$\sqrt{(-A)\sqrt{(-A)^6}} - A^2 = \sqrt{\sqrt{(-A)^2\cdot(-A)^6}} - A^2$$
$$= \sqrt[4]{(-A)^8} - A^2$$
$$= (-A)^2 - A^2$$
$$= A^2 - A^2$$
$$= 0$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $x^2-(\lambda+1)x+\lambda+4$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-(\lambda+1)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda+4) = (\lambda+1)^2 - 4\lambda - 16 =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda - 16 = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$

Δ2. Για να αληθεύει η ανίσωση $x^2-(\lambda+1)x+\lambda+4>0$ για κάθε $x\in R$

πρέπει $\Delta \prec 0$

$\lambda^2-2\lambda-15\prec 0$

$\lambda^2-2\lambda-15=0$

$\Delta_1=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=64$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-2)\pm 8}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2}$ Άρα $\lambda=5$ και $\lambda=-3$

λ	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$\lambda^2-2\lambda-15$	+	-	+	

Άρα $\lambda\in(-3,5)$

Δ3. **i)** Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες θα πρέπει $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

Έχουμε:

$x^2-(\lambda+1)x+\lambda+4=0$

$x_1+x_2=S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-(\lambda+1)}{1}=\lambda+1$

$x_1\cdot x_2=P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\lambda+4}{1}=\lambda+4$

$\dfrac{1}{x_1{}^2}+\dfrac{1}{x_2{}^2}=2$

$\dfrac{x_2{}^2+x_1{}^2}{x_1{}^2\cdot x_2{}^2}=2$

$\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}=2$

$\dfrac{S^2-2P}{P^2}=2$

$S^2-2P=2P^2$

$(\lambda+1)^2-2(\lambda+4)=2(\lambda+4)^2$

$$\left(\lambda+1\right)^2-2\left(\lambda+4\right)=2\left(\lambda^2+8\lambda+16\right)$$

$$\lambda^2+2\lambda+1-2\lambda-8=2\lambda^2+16\lambda+32$$

$$\lambda^2+16\lambda+39=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16^2-4\cdot1\cdot39=256-156=100$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-16\pm10}{2}$$

Άρα $\lambda=-3$ Απορρίπτεται

και $\lambda=-13$ Δεκτή

ii) Έχουμε:

$$x_1<0<x_2 \text{ και } |x_1|>|x_2|$$

$$-x_1>x_2$$

$$x_1+x_2\prec 0$$

Όποτε πρέπει $\Delta\succ 0$ και $S\prec 0$

Από ερώτημα Δ2 έχουμε $\Delta\succ 0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

$S\prec 0\Leftrightarrow \lambda+1\prec 0\Leftrightarrow \lambda\prec -1$

Άρα $\lambda\in(-\infty,-3)$