

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2Θ(α)

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 24 Μαΐου 2020  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 81

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41

Α3.

- α. Σωστό
- β. Λάθος
- γ. Σωστό
- δ. Λάθος
- ε. Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση της πλευράς AB είναι:  $y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$ 

$$y - 6 = \frac{6 - 2}{4 - (-3)}(x - 4) \Leftrightarrow y - 6 = \frac{4}{7}(x - 4) \Leftrightarrow 7y - 42 = 4x - 16 \Leftrightarrow 4x - 7y + 26 = 0.$$

Β2. Θα βρούμε το μέσο K του AG που είναι:  $(x_K, y_K) = \left( \frac{x_A + x_G}{2}, \frac{y_A + y_G}{2} \right) \Rightarrow$ 

$$(x_K, y_K) = \left( \frac{-3 + 8}{2}, \frac{2 + (-1)}{2} \right) \Leftrightarrow (x_K, y_K) = \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow K \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

το K θα είναι και μέσο του ΒΔ οπότε:  $(x_K, y_K) = \left( \frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$ . Άρα

παίρνουμε τις σχέσεις

$$x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{4 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 4 + x_\Delta = 5 \Leftrightarrow x_\Delta = 1 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 6 + y_\Delta = 1 \Leftrightarrow y_\Delta = -5$$

Άρα  $\Delta(1, -5)$ .

**B3.** Μ μέσο της ΒΓ άρα  $(x_M, y_M) = \left( \frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2} \right) = \left( \frac{4 + 8}{2}, \frac{6 + (-1)}{2} \right) = \left( 6, \frac{5}{2} \right)$

Δηλαδή  $M\left(6, \frac{5}{2}\right)$ , οπότε το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από την σχέση

$$\left( \overset{\Delta}{A}MB \right) = \frac{1}{2} \left| \det \left( \vec{AM}, \vec{AB} \right) \right| \quad (1)$$

$$\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = \left( 6 - (-3), \frac{5}{2} - 2 \right) = \left( 9, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4 - (-3), 6 - 2) = (7, 4)$$

$$\det \left( \vec{AM}, \vec{AB} \right) = \begin{vmatrix} 9 & \frac{1}{2} \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 7 \cdot \frac{1}{2} = 36 - \frac{7}{2} = \frac{65}{2}. \text{ Άρα από την (1)}$$

$$\text{έχουμε } \left( \overset{\Delta}{A}MB \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{2} = \frac{65}{4}$$

**B4.** Θα βρούμε την κλίση της ευθείας AM που είναι:  $\lambda_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-3 - 6} \Leftrightarrow$

$$\lambda_{AM} = \frac{-\frac{1}{2}}{-9} = \frac{1}{18}. \text{ Επειδή η ευθεία που ζητάει είναι κάθετη στην AM θα ισχύει:}$$

$$\lambda_{AM} \cdot \lambda_\varepsilon = -1, \text{ όπου } (\varepsilon) \text{ η ευθεία που ζητάει. Άρα } \frac{1}{18} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -18.$$

$$\text{Η ευθεία που ζητάει θα είναι: } y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Rightarrow y - (-5) = -18(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y + 5 = -18x + 18 \Leftrightarrow 18x + y = 13$$

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι:  $y^2 + x^2 - 2xy + y - x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2x)y + x^2 - x - 2 = 0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου:

$$\Delta = (1 - 2x)^2 - 4(x^2 - x - 2) = 1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 4x + 8 = 9$$

Άρα οι λύσεις του τριωνύμου δίνονται από τις σχέσεις:

$$y = \frac{2x - 1 + \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 1 + 3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x + 2}{2} \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ (1) και}$$

$$y = \frac{2x - 1 - \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 1 - 3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 4}{2} \Leftrightarrow y = x - 2 \text{ (2)}$$

Οι (1) και (2) παριστάνουν δύο ευθείες τις  $(\varepsilon_1): y = x + 1$  και  $(\varepsilon_2): y = x - 2$  που είναι μεταξύ τους παράλληλες καθώς έχουν ίσες κλίσεις.

Γ2. Έστω  $M(x, y)$  σημείο της μεσοπαράλληλου των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

Τότε ισχύει  $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1 + 1}} \Leftrightarrow |x - y + 1| = |x - y - 2| \Leftrightarrow x - y + 1 = x - y - 2$$

ή  $x - y + 1 = -(x - y - 2)$  οπότε έχουμε ότι η πρώτη σχέση είναι αδύνατη ενώ από τη δεύτερη σχέση προκύπτει η ζητούμενη ευθεία με εξίσωση  $(\varepsilon): 2x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon): y = x - \frac{1}{2}$

Γ3. Παίρνουμε ένα σημείο  $K$  της ευθείας  $(\varepsilon_1)$

Για  $x=0$  έχουμε  $y=1$ . Άρα  $K(0, 1)$ .

Η απόσταση των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(K, \varepsilon_2) = \frac{|0 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Γ4. Έστω μία ευθεία  $(\eta)$  παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon_1)$ . Αυτή θα είναι της μορφής  $(\eta): y = x + \alpha$

Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία:

- Για  $x = 0 \Rightarrow y = \alpha$ . Άρα  $A(0, \alpha)$
- Για  $y = 0 \Rightarrow x = -\alpha$ . Άρα  $B(-\alpha, 0)$

Έχουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου  $OAB$  είναι:

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot |\alpha| \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm 4$$

Επομένως  $(\eta_1) : y = x + 4$  και  $(\eta_2) : y = x - 4$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**  $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $4|\vec{\alpha}|^2 - 8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = 0$ , επειδή  $|\vec{\alpha}| = 1$  έχουμε ότι  $-8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4$  (1)

$$|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = 3^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = 9 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 9, \text{ επειδή } |\vec{\alpha}| = 1 \text{ έχουμε ότι } -4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 8$$
 (2)

Λύνοντας σύστημα τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4 \\ -4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 8\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 4 \\ -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 8|\vec{\beta}|^2 = 16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \Leftrightarrow 5|\vec{\beta}|^2 = 20 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \pm 2$$

Επειδή το μέτρο είναι πάντα θετικός αριθμός το  $|\vec{\beta}| = 2$

Από (1) έχουμε:  $-8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4 \Leftrightarrow -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3 \cdot 2^2 = -4 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 2$

**Δ2.** Για  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2$ , οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται:

$$(\varepsilon_1) : (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y + \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$$

Η εξίσωση  $(\varepsilon_1)$  δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 1 = 0 \\ \text{και} \\ \lambda - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \text{και} \\ \lambda = 4 \end{array} \right\} \text{άτοπο γιατί η παράμετρος } \lambda \text{ δεν μπορεί να λαμβάνει}$$

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση  $(\varepsilon_1)$  παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Ομοίως η εξίσωση  $(\varepsilon_2)$  δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 2 = 0 \\ \text{και} \\ 3\lambda = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \text{και} \\ \lambda = 0 \end{array} \right\} \text{άτοπο γιατί η παράμετρος } \lambda \text{ δεν μπορεί να λαμβάνει}$$

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση  $(\varepsilon_2)$  παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Έστω ένα διάνυσμα  $\vec{u} // (\varepsilon_1) : \vec{u} = (\lambda - 4, -\lambda - 1)$  και έστω ένα διάνυσμα  $\vec{v} // (\varepsilon_2) : \vec{v} = (3\lambda, -\lambda - 2)$ . Τότε για να είναι  $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$  θα πρέπει  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4, -\lambda - 1) \cdot (3\lambda, -\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda - 4) + (-\lambda - 1)(-\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$  με ρίζες  $\lambda = 2$  ή  $\lambda = \frac{1}{4}$ .

**Δ3.**  $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$

Για  $\lambda = 1$  η  $(\varepsilon_2)$  γίνεται:  $3x + 3y - 3 = 0$

Για  $\lambda = 2$  η  $(\varepsilon_2)$  γίνεται:  $2x + 3y - 1 = 0$ , οπότε λύνουμε σύστημα να βρούμε το σημείο Α που τέμνονται οι δύο ευθείες αυτές.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -2x - 3y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ -2x - 3y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -y = 1$$

Άρα  $y = -1$ , και από την  $x + y = 1$  βγάζουμε  $x + (-1) = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ,  $A(2, -1)$

Θα δείξουμε ότι το σημείο  $A(2, -1)$  ανήκει για κάθε τιμή του  $\lambda$  στην ευθεία

$(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$ , βάζοντας όπου  $x = 2$  και  $y = -1$ .

$(\lambda + 2) \cdot 2 + 3\lambda \cdot (-1) + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 4 - 3\lambda + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$  που ισχύει.

**Δ4.** Ο κύκλος θα είναι της μορφής  $x^2 + y^2 = \rho^2$  (1).

Η  $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$  για  $\lambda = 1$  γίνεται  $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$  ( $\varepsilon$ )

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho$$

Από την (1) έχουμε:  $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ .