

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε απόδειξη (1) σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.
- A2.** α) Βλέπε ορισμό σελίδα 72 σχολικού βιβλίου.
 β) Βλέπε ορισμό σελίδα 57 σχολικού βιβλίου.
- A3.** α) Σωστό (βλέπε σελίδα 55 σχολικού βιβλίου.)
 β) Λάθος (βλέπε σελίδα 69 σχολικού βιβλίου.)
 (Το Σωστό είναι ότι $\sqrt{a^2} = |a|$)
 γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 79 σχολικού βιβλίου.)
 (Το Σωστό είναι ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι αδύνατη)
 δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.)
 ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 107 σχολικού βιβλίου.)

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Για την παράσταση $\sqrt{\sqrt{2^3} \cdot 2}$ ισχύει:

$$\sqrt{\sqrt{2^3} \cdot 2} = \sqrt{2^3 \cdot 2} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$$
 (1)
 οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2^3} \cdot 2} = \sqrt[3]{4} \cdot 4 = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{256} = 6.35$$

- B2.** Έχουμε:

$$B = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (2-\sqrt{2}) + 1 \cdot (2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

B3. Στο ερώτημα Β1 έχουμε αποδείξει ότι $A = 2$, οπότε η παράσταση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης ισούται με:

$$\frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = B = 2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^3 = \frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} \Leftrightarrow x^3 = B \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Όταν δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $|a-3|-1$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=x$ είναι 1. Επομένως

$$\begin{aligned} |a-3|-1=1 &\Leftrightarrow |a-3|=1+1 \Leftrightarrow |a-3|=2 \Leftrightarrow \\ a-3=2 &\text{ ή } a-3=-2 \Leftrightarrow \\ a=3+2 &\text{ ή } a=3-2 \Leftrightarrow \\ a=5 &\text{ ή } a=1. \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι δεκτές και οι δυο τιμές του a .

- Για $a = 5$ η ευθεία ε γίνεται:

$$y = (5-3-1)x + (5^2 + 2|5|-3) \Leftrightarrow y = (2-1)x + (25+10-3) \Leftrightarrow y=x+32,$$

η οποία είναι παράλληλη με την $y=x$.

- Για $a \neq 1$ η ε γίνεται:

$$y = (1-3-1)x + (1^2 + 2|1|-3) \Leftrightarrow y = (-2-1)x + (1+2-3) \Leftrightarrow y=x$$

η οποία ταυτίζεται με την $y=x$. Άρα η τιμή $a = 1$ απορρίπτεται.

Ωστε είναι $a \neq 5$.

Γ2. Επειδή η γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα xx είναι οξεία, έχει $\varepsilon\omega > 0$. Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) ισούται με την $\varepsilon\omega$, οπότε

$$\begin{aligned} |a-3|-1 > 0 &\Leftrightarrow |a-3| > 1 \Leftrightarrow a-3 < -1 \text{ ή } a-3 > 1 \Leftrightarrow \\ a < 3-1 &\text{ ή } a > 3+1 \Leftrightarrow a < 2 \text{ ή } a > 4 \end{aligned}$$

Γ3. Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Για $x = y = 0$ η εξίσωση της ε δίνει:

$$0 = (|a-3|-1) \cdot 0 + (a^2 + 2|a| - 3) \Leftrightarrow a^2 + 2|a| - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2 + 2|a| - 3 = 0$$

Θέτουμε:

$$|a| = \omega \geq 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$$

Αυτή έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

Είναι:

$$\omega_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad \omega_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Για $\omega = 1$ η (1) δίνει

$$|a| = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο έχει $a=4$, $\beta = -4\lambda$, $\gamma=5\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4\lambda)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5\lambda = 16\lambda^2 - 80\lambda$$

Είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 80\lambda = 0 \Leftrightarrow 16\lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 5.$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	0	5	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	$+$

Επομένως για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 0$ και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \text{ ενώ } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 5)$$

Δ2. α. Το τριώνυμο έχει δυο ρίζες άνισες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} αν και μόνο αν

$$4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 5]$$

Δ3. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-4\lambda)}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\lambda}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \lambda$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

Επομένως

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\lambda}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 5\lambda - 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Όμως το $4 \notin (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$, επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ , ώστε να είναι

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1$$

Δ4. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και A' είναι

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq P(A') \leq 1$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(A)$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 \leq 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A)x + 5P(A) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(A')$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 \leq 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A')x + 5P(A') \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- Για την πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι $P(\Omega) = 1$. Έτσι $4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega) = 4x^2 - 4x + 5$, που είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(\Omega) = 1$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_3 \leq 0$,

επομένως

$$4x^2 - 4x + 5 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$[4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)] [4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')] [4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega)] \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$