

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

## ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1

#### A. 1.

1. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 1.**  
2. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 3.**

#### B. 1.

1. → δ.  
2. → α.  
3. → β.  
4. → ε.  
5. → γ.

#### A. 2.

- α) : Λανθασμένη  
β) : Σωστή  
γ) : Λανθασμένη

#### B. 2.

γ. ορθογώνιο

### ΘΕΜΑ 2

α) Βρίσκουμε τις τιμές του  $\lambda$ , που μηδενίζουν τους συντελεστές του  $x$  και το σταθερό όρο του πολυώνυμου. Έχουμε:  $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$ .

Άρα:  $\lambda = -2$  ή  $\lambda = 0$  ή  $\lambda = 2$ . Όμοια:  $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0$ . Άρα:  $\lambda = 0$  ή  $\lambda = 2$ .

Τέλος:  $-\lambda + 2 = 0$ . Άρα:  $\lambda = 2$ .

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. Αν  $\lambda \neq -2$  ή  $\lambda \neq 0$  ή  $\lambda \neq 2$ , τότε το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι **3<sup>ο</sup> βαθμού**.  
ii. Αν  $\lambda = -2$ , τότε το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι **1<sup>ο</sup> βαθμού**. ( $P(x) = 8x + 4$ ).  
iii. Αν  $\lambda = 0$ , τότε το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι **μηδενικού βαθμού**. ( $P(x) = 2$ ).  
iv. Αν  $\lambda = 2$ , τότε το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι το μηδενικό πολυώνυμο ( $P(x) = 0$ ) και **δεν ορίζεται βαθμός**.

β) Για  $\lambda = 1$  έχουμε:

$$P(x) = (1^3 - 4 \cdot 1)x^3 + (1^2 - 2 \cdot 1)x - 1 + 2 \Leftrightarrow P(x) = -3x^3 - x + 1.$$

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P$  από το σημείο  $(1, -3)$ , θα πρέπει:  $P(1) = -3$ .

$$\text{Έχουμε: } P(1) = -3 \cdot 1^3 - 1 + 1 \Leftrightarrow P(1) = -3.$$

$$\gamma) P(x) < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 1 < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 4 < 0.$$

Παραγοντοποιούμε την τριτοβάθμια χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

-3	0	-1	4	<b>1</b>
	-3	-3	-4	
-3	-3	-4	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται:

$$(x - 1)(-3x^2 - 3x - 4) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 + 3x + 4) > 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, ( $\Delta = 9 - 48 = -39$ ), άρα το τριώνυμο είναι για κάθε  $x$  ομόσημο του  $a$  ( $a = 3$ ), δηλαδή είναι για κάθε  $x$  θετικό.  
Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	-	+	
$3x^2 + 3x + 4$	+	+	
Γινόμενο	-	+	

Άρα:  $x > 1$ .

### ΘΕΜΑ 3

A.

1. Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5^{\log x} = x^{\log 5} \Leftrightarrow \log 5^{\log x} = \log x^{\log 5} \Leftrightarrow \log x \log 5 = \log 5 \log x.$$

2. Για κάθε  $x, y > 0$  έχουμε:  $f(x \cdot y) = 5^{\log(xy)} = 5^{\log x + \log y} = 5^{\log x} \cdot 5^{\log y} = f(x) \cdot f(y)$ .

3. Για κάθε  $x, y > 0$  έχουμε:  $f\left(\frac{x}{y}\right) = 5^{\log \frac{x}{y}} = 5^{\log x - \log y} = \frac{5^{\log x}}{5^{\log y}} = \frac{f(x)}{f(y)}$ .

4. Για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  έχουμε:  $f(x^v) = 5^{\log x^v} = 5^{v \log x} = (5^{\log x})^v = [f(x)]^v$ .

B.

$f^2(x) = 5 + 4 \cdot g(x) \Leftrightarrow (5^{\log x})^2 = 5 + 4x^{\log 5}$ . Από το A.1. η προηγούμενη σχέση

γράφεται:  $(5^{\log x})^2 = 5 + 4 \cdot 5^{\log x}$ . Θέτουμε:  $5^{\log x} = \omega$ . Άρα:  $\omega^2 - 4\omega - 5 = 0$ .

( $\Delta = 16 + 20 = 36$  και  $\omega = \frac{4 \pm 6}{2}$ ). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το 5 και το -1. (Η λύση -1 απορρίπτεται, γιατί  $5^{\log x} > 0$ ).

Έχουμε:  $5^{\log x} = 5$ . Η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1, άρα:  $\log x = 1 \Leftrightarrow \log x = \log 10$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1, άρα τελικά:  $x = 10$ .

Γ. Πρέπει:  $x > 0$  και  $x^2 - 4 > 0$ . Άρα:  $x > 0$  και  $x < -2$  ή  $x > 2$ . Επομένως:  $x > 2$ .

$$f(3x) > f(x^2 - 4) \Leftrightarrow 5^{\log 3x} > 5^{\log(x^2 - 4)}.$$

Η εκθετική συνάρτηση με βάση 5 είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$\log 3x > \log(x^2 - 4)$ . Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι γνησίως

αύξουσα, άρα:  $3x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$ .

( $\Delta = 9 + 16 = 25$  και  $x = \frac{3 \pm 5}{2}$ ). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το -1 και το 4 και το

τριώνυμο είναι εντός των ριζών του ετερόσημο του  $a$  ( $a = 1$ ), δηλαδή είναι αρνητικό, άρα:  $-1 < x < 4$ .

Επειδή  $x > 2$ , τελικά έχουμε:  $2 < x < 4$ .

#### ΘΕΜΑ 4

**A.**

1. Χρησιμοποιώντας τον τύπο:  $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$ , με  $\alpha_1 = \ln e$ ,  $\alpha_4 = \ln 8 + 1$  έχουμε  $\alpha_4 = \alpha_1 + (4-1)\omega \Leftrightarrow \ln 8 + 1 = \ln e + 3\omega \Leftrightarrow \ln 2^3 + 1 = 1 + 3\omega \Leftrightarrow 3 \ln 2 = 3\omega$ .

Άρα:  $\omega = \ln 2$ .

2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο:  $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$ , με  $\alpha_1 = \ln e$  και αντικαθιστώντας από το Α.1.

όπου  $\omega = \ln 2$ , έχουμε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}[2\ln e + (v-1)\ln 2] \Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}[2 \cdot 1 + (v-1)\ln 2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = v + \frac{v(v-1)}{2}\ln 2 \Leftrightarrow S_v = v + \ln 2 \frac{v(v-1)}{2}.$$

3. Αντικαθιστώντας το  $S_v$  από τον τύπο του Α.2., έχουμε:

$$v + \frac{1}{2}\ln 2^{v^3-21} = v + \ln 2 \frac{v(v-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2^{v^3-21} = \ln 2 \frac{v(v-1)}{2} \Leftrightarrow \ln(2^{v^3-21})^{\frac{1}{2}} = \ln 2 \frac{v(v-1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{\frac{v^3-21}{2}} = \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}} * \Leftrightarrow \frac{v^3-21}{2} = \frac{v(v-1)}{2} \Leftrightarrow v^3 - 21 = v^2 - v \Leftrightarrow v^3 - v^2 + v - 21 = 0.$$

\* ( Η συνάρτηση  $\ln$  είναι 1-1 ).

Λύνουμε την τριτοβάθμια με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	-1	1	-21	<b>3</b>
	3	6	21	
1	2	7	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται:  $(v-3)(v^2 + 2v + 7) = 0 \Leftrightarrow v = 3 \text{ ή } v^2 + 2v + 7 = 0$ .

Η  $v^2 + 2v + 7 = 0$  είναι αδύνατη, γιατί η διακρίνουσά της είναι αρνητική.

(  $\Delta = 4 - 28 = -24 < 0$  ). Άρα:  $v = 3$

**B.**

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο:  $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$ , με  $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_v = 36$ , έχουμε:

$$36 = 6 + (v-1)\omega \Leftrightarrow 36 - 6 = (v-1)\omega \Leftrightarrow 30 = (v-1)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{30}{v-1} \quad (1).$$

β) Επειδή ισχύει:  $\alpha_{v-2} = 2\alpha_4$ , έχουμε:

$$6 + (v-3)\omega = 2(6 + 3\omega) \Leftrightarrow 6 + v\omega - 3\omega = 12 + 6\omega \Leftrightarrow v\omega - 9\omega = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v \frac{30}{v-1} - 9 \frac{30}{v-1} = 6 \Leftrightarrow 30v - 270 = 6(v-1) \Leftrightarrow 30v - 270 = 6v - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24v = 264 \Leftrightarrow v = \frac{264}{24} \Leftrightarrow v = 11.$$

$$\text{Άρα: } v = 11 \quad \omega = \frac{30}{11-1} = \frac{30}{10} = 3.$$