ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 15
β) i) Σχολικό βιβλίο σελ. 35
ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 16

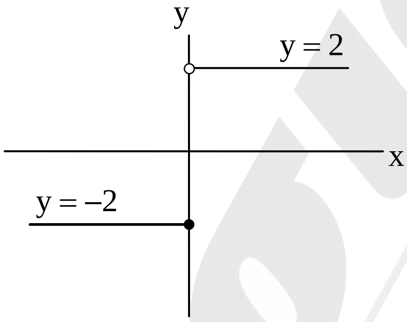
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142
Α3. Απόδειξη θεωρήματος μονοτονίας : Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 135

Α4. α) Η πρόταση είναι λάθος.
Αιτιολόγηση :
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{αν } x\le 0 \\ 2 & \text{αν } x>0 \end{cases}$

Τότε $f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x<0 \\ 0 & \text{αν } x>0 \end{cases}$

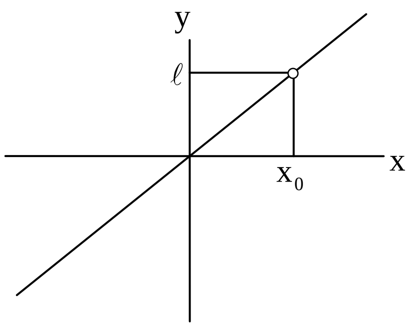
Επομένως $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αλλά η f δεν είναι σταθερή σε όλο το Α

Γραφική Εξήγηση :



β) Η πρόταση είναι λάθος.
Θα ήταν σωστή αν η συνάρτηση f ήταν συνεχής στο $x_0\in A$.
Αντιπαράδειγμα :
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αλλά $f(x_0)\ne\ell$



Α5. γ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\lambda$ δέχεται στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την $y=2$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Όπου $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

B2.

$f(x)-x=0 \Leftrightarrow e^{-x}+2-x=0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{-x}-x+2$ με $x\in R$. Τότε :

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα, επειδή η g είναι συνεχής στο R θα είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $[2,3]$ ισχύει :

$$\left.\begin{aligned} g(2)&=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0 \\ g(3)&=e^{-3}-3+2=\frac{1}{e^{3}}-1<0 \end{aligned}\right\} g(2)\cdot g(3)<0$$

Άρα για την g στο διάστημα $(2,3)$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0\in(2,3)$

Επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα x_0 είναι μοναδική επομένως $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$

B3.

$f(x)=e^{-x}+2$, $x\in R$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R τότε $f'(x)=-e^{-x}<0$ Άρα f γνησίως φθίνουσα, επομένως η f «1-1» άρα αντιστρέφεται.

Θέτω $f(x)y$ τότε $y=e^{-2}+2 \Leftrightarrow e^{-x}=y-2$ (1)

Από την (1) πρέπει $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$ τότε

$(1) \Rightarrow \ln e^{-x}=\ln(y-2) \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$

Άρα $f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$ και για $x=y \Rightarrow$

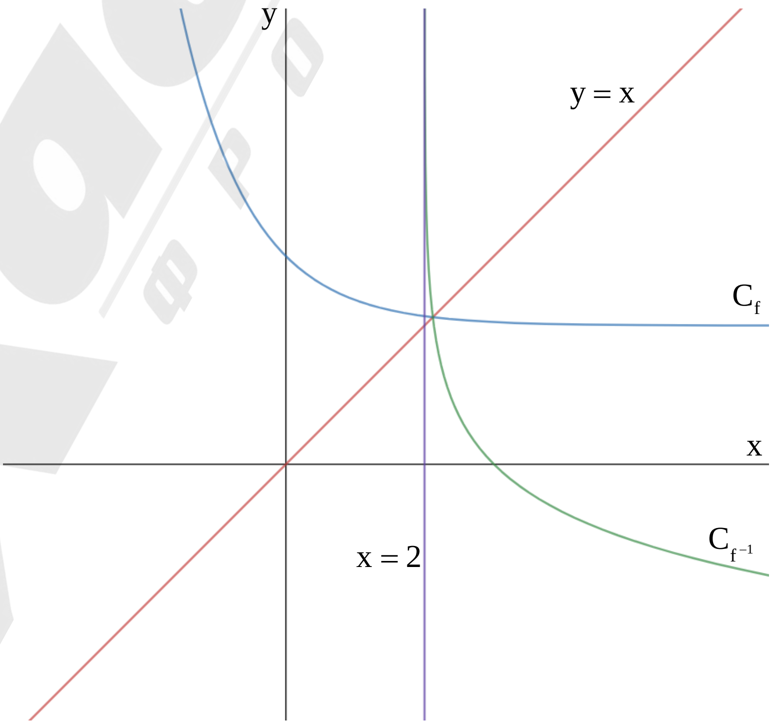
$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), \quad x>2$

B4.

$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), \quad x>2$, τότε

$\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=+\infty$,

άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1}



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1. Ν.α.ο. $\alpha=1$ και $\beta=1$

f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ άρα f συνεχής

$(1)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\ell\in R$

$(2)\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell\in R$ και $f(1)=1+\alpha$

Από (1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)$

$1+\alpha=1+\beta\Rightarrow\boxed{\alpha=\beta}$

Από (2) $\lim\limits_{x\to 1^{-1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^{-1}}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^{-1}}\dfrac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2\cancel{+\alpha}-1\cancel{-\alpha}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$

Άρα από (1) και (2) : $\left.\begin{matrix}1+\beta=2\\ \alpha=\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\beta=1\\ \alpha=1\end{matrix}$

Γ2. Ν.α.ο. f γνησίως αύξουσα στο R και να βρω Σύνολο Τιμών

f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ άρα f συνεχής

$$\left.\begin{matrix}\text{Για } x<1,\ f'(x)=e^{x-1}+1=\dfrac{1}{e}e^x+1>0\\ \text{Για } x>1,\ f'(x)=2x>0\\ \text{Για } x=1,\ f'(1)=2\end{matrix}\right\}$$

άρα συνεχής στο 1, οπότε γν. αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της

<u>Σύνολο Τιμών</u>

Για $A_1=(-\infty,1]\Rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Οπότε $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$

$f(1)=2$

$f(A_1)=(-\infty,2]$

Για $A_2=(1,+\infty)\Rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Άρα $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$

$f(1)=2$

Οπότε $f(A_2)=(2,+\infty)$

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,+\infty)$

Άρα η f έχει Σύνολο Τιμών το R

Γ3.

i) Ν.α.ο η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα για x_0, η οποία είναι και αρνητική

Εφόσον το 0 (μηδέν) περιέχεται στο σύνολο τιμών, αυτό σημαίνει πως θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, αυτό το x_0 είναι και μοναδικό.

Στο διάστημα $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \overset{f(0)=\frac{1}{e}}{\Rightarrow} f(x)<\frac{1}{e}$

Και για τυχαία τιμή $x=-3 \Rightarrow f(-3)=\frac{1}{e^3}-3<0$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano στο $(-3,0)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ f(-3)\cdot f(0)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ υπάρχει $x_0 \in (-3,0)$, δηλαδή x_0 αρνητικός αριθμός

Ώστε : $f(x_0)=0$ και αυτή η ρίζα είναι και μοναδική καθώς f γνησίως αύξουσα

ii) Ν.α.ο η $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Για $x>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Rightarrow f(x)>0$

Οπότε : $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Rightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$

$f(x)>0 \quad (1)$

$f(x)-x_0>-x_0$, και εφόσον το $x_0<0$, άρα $-x_0>0$, οπότε $f(x)-x_0>0 \quad (2)$

Από (1), (2) $f(x)\cdot\left(f(x)-x_0\right)>0 \Rightarrow f(x)\cdot\left(f(x)-x_0\right)\neq 0$

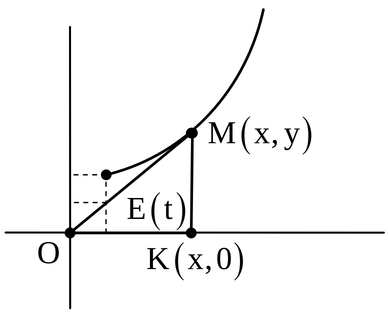
Οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση καθώς δεν μπορεί να μηδενιστεί

Γ4. Για $M(x,y)$ στην καμπύλη $y=f(x)$ με $x\geq 1$

Για $t=t_0$ το M διέρχεται από το $A(3,10)$.

O ρυθμός μεταβολή της τετμημένης του M είναι 2 μον/sec

Να βρω ρυθμό μεταβολής εμβαδού τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ με $M(x,0)$ και $O(0,0)$ όταν $t=t_0$



$y=f(x)=x^2+1$, $M(3,10)$, $\quad x(t_0)=3,\ y(t_0)=10$ και $x'(t_0)=2$

Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι : $E=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y$ συναρτήσει του χρόνου t θα έχω

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot y(t)$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(x'(t)y(t)+x(t)\cdot y'(t)\right)=\frac{1}{2}\left(x'(t)y(t)+x(t)\cdot\left(x^2(t)+1\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x'(t)y(t)+x(t)\cdot\left(2x(t)\cdot x'(t)\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x'(t)\cdot y(t)+2x^2(t)\cdot x'(t)\right)$$

Για $t=t_0$ έχω $x(t_0)=3,\quad y(t_0)=10,\quad x'(t_0)=2$

Άρα $E'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot 10+2\cdot 3^2\cdot 2\right)=28$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων τότε $f'(x)=(x-1)'\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\left[\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]'+\alpha$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}+\alpha$$

Επειδή η ευθεία (ε): $y=-x+2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$ τότε $f'(1)=\lambda_{(\varepsilon)}=-1$

Άρα $f'(1)=\ln(1)+\frac{0}{0+1}+\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-1\ (1)$

Επίσης $f(1)=1\Leftrightarrow(1-1)\ln(1)+\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1\ (2)$

Άρα (1), (2) $\Rightarrow\alpha=-1,\quad\beta=2$

Δ2.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^2|f(x)-y|dx=\int_1^2|f(x)-(-x+2)|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2\right|dx=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]\right|dx$$

Αλλά $1\le x\le 2\Leftrightarrow 0\le x-1\le 1\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2\le 1\Leftrightarrow 1\le(x-1)^2+1\le 2\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln 1\le\ln\left[(x-1)^2+1\right]\le\ln 2$

Άρα $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\ge 0$ και $x-1\ge 0$, επομένως

$$\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\int_1^2\frac{1}{2}(2x-2)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\int_1^2\frac{1}{2}\left(x^2-2x+2\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2-2x+2\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}(2\cdot\ln 2-1\cdot\ln 1)-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-2)dx=\ln 2-\frac{1}{2}\left[x^2-2x\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}(0-(-1))=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Δ3.

i) Αρκεί $f'(x)\ge -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\ge -1\Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\ge 0$, ισχύει διότι $\ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\ge 0$ και

$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\ge 0$

ii) $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\ge(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}-\lambda$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+(2-\lambda)-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(1)\geq-\frac{1}{2},\quad \lambda\in R$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\quad (1)$$

Αλλά από το **Δ3.i.** δείξαμε ότι $f'(x)\geq-1$ για κάθε $x\in R$ άρα και $f'(\xi)\geq-1$ και

$$(1)\Rightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq-1\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$$

Δ4.

Από την υπόθεση η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0,g(x_0))$ είναι $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow$

$y-\left(-x_0^3-x_0+2\right)=\left(-3x_0^2-1\right)(x-x_0)$

$y+x_0^3+x_0-2=-3x_0^2\cdot x+3x_0^3-x+x_0 \Leftrightarrow y=-3x_0^2\cdot x+2x_0^3-x+2$

(ζ) : $y=\left(-3x_0^2-1\right)x+2x_0^3+2$. Οι ευθείες (ε), (ζ) θα ταυτίζονται όταν :

$$\left.\begin{array}{r}-3x_0^2-1=-1\\ 2x_0^3+2=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=0\end{array}$$, Άρα στο σημείο $B(0,g(0))$ ή $B(0,2)$

Η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται της C_g

Η εφαπτομένη (ε) : $y=-x+2$ είναι μοναδική των C_f και C_g διότι αν θεωρήσουμε μία άλλη εφαπτομένη της μορφής $(\eta): y=\lambda x+\beta$ τότε :

Για την f θα ισχύει : $f'(x_1)=\lambda\geq-1$

Για την g θα ισχύει : $g'(x_2)=\lambda=-3x_2^2-1\geq-1$

Αλλά $-3x_2^2-1\geq-1\Leftrightarrow 3x_2^2\geq0\Leftrightarrow x_2=0$, δηλαδή το σημείο επαφής της $y=\lambda x+\beta$ με την C_g θα είναι το $\Gamma(0,2)$ το οποίο ταυτίζεται με το σημείο επαφής της (ε): $y=-x+2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ μοναδική

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές