ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 135
Α2.ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 51
Α3.ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 23
Α4.α. Σ
β. Λ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ με $u \in \mathbb{R}$

Οπότε $f(u)=ue^{-(u-1)}=ue^{-u+1}=ue^{1-u}$

Οπότε $f(x)=xe^{1-x},\ x \in \mathbb{R}$

Β2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

- Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=1$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^{1-x}(1-x)'(1-x)+e^{1-x}(1-x)'$

$$=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}=-e^{1-x}(1-x+1)=-e^{1-x}(2-x)=e^{1-x}(x-2)$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	ΣΚ	$\smile$	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$

Το σημείο $A(2, f(2))$, δηλαδή $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι ΣΚ

Για τις ασύμπτωτες:

Για $x \to -\infty (y = \lambda x + \beta)$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x}$

  Θέτουμε $1 - x = u$

  Για $x \to -\infty$ είναι $u \to +\infty$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

  Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$

  Για $x \to +\infty (y = \lambda x + \beta)$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x}$

  Θέτουμε $1 - x = u$

  Για $x \to +\infty$ είναι $u \to -\infty$

  Οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0 = \lambda$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

  Άρα $y = 0$, οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

B4. i. $A_1 = (-\infty, 1], f\uparrow$ οπότε

$f(A_1) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$

αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{1-x}) = -\infty$ αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

$f(1) = 1$

$A_2 = (1, +\infty)$, $f\downarrow$ οπότε

$f(A_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1} f(x)) = (0, 1)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1) = 1$ (αφού η f είναι συνεχής στο R άρα και στο $x = 1$)

Άρα, $f(A) = f(A_1) \bigcup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

ii. Για $\lambda > 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Για $\lambda=0$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Για $0<\lambda<1$ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις μια στο $(0,1)$ και μια στο $(1,+\infty)$.

Για $\lambda<0$ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια λύση στο διάστημα $(-\infty,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f έχει τύπο $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ η f έχει τύπο $f(x)=\text{συν}x$ και είναι συνεχής.
- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Έχουμε: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\alpha x^3-3x^2-x+1)=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\text{συν}x=\text{συν}0=1$

$f(0)=1$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}=\lim_{x\to 0^+}=f(0)$, τότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Αρα η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- Για $x<0$ έχουμε: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}$

$=\frac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}=\alpha x^3-3x-1$

Επομένως $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(\alpha x^2-3x-1)=-1$

- Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ έχουμε: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\text{συν}x-1}{x}$

Επομένως $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{συν}x-1}{x}=0$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. i.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = (\text{συν}x)' = -\,\text{ημ}x$
- $\left.\begin{array}{r} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{συν}\frac{3\pi}{2} = -1 \end{array}\right\}$ οπότε $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

ii. Με $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\,\text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$

Άρα $\xi = \pi$ το μοναδικό σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$

Γ3. Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Έχουμε : $f'(x) = (ax^3 - 3x^2 - x + 1)' = 3ax^2 - 6x - 1$

Το τριώνυμο $3ax^2 - 6x - 1$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = 36 + 12a = 12(a+3) < 0$, αφού $a < -3$

Επειδή $3a < -9 < 0$ θα ισχύει ότι $3ax^2 - 6x - 1 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Άρα, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ όποτε δεν υπάρχουν σημεία της Cf με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

- $f'(x) < 0$

Γ4. Έχουμε για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

- Για $0 < x < \pi$ είναι $f'(x) = -\,\text{ημ}x < 0$.
- Για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = -\,\text{ημ}x > 0$.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		π		$3\pi/2$
$f'(x)$		−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↘		↘	$\boxed{-1 \text{ min}}$	↗	

- Αφού $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0) \bigcup (0, \pi)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \pi]$.

- Άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Άρα στο $x_0 = \pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = \text{συν}\pi = -1$.

Επομένως ισχύει $f(x) \geqslant -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$.

Η συνάρτηση K είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

$K(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$

$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

Οπότε $f(1)f(e) < 0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$.

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $K'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, οπότε η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $K(x) = 0$ δηλαδή της εξίσωσης $\ln x = \frac{1}{x}$

Δ2.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x\, x_0}$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x\, x_0} = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x\, x_0} > 0 \xLeftrightarrow{x, x_0 > 0} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x - x_0} < 0 \xLeftrightarrow{x, x_0 > 0} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$$

Το πρόσημο της f΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		x_0		$+\infty$
f(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	
			min		

Άρα η f στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το

$f(x_0)=\ln x_0\cdot(x_0+1)-\ln x_0-1=$

$x_0\ln x_0+\ln x_0-\ln x_0-1=x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}-1=0$

Δ3.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g και C_h είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\qquad(1)$$

- Για $x\leqslant 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Για $x>0$ έχουμε :

  $(1)\Leftrightarrow \ln(xe^{-x})=\ln\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\dfrac{x_0}{e}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-x-1\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow f(x)=0$.

  Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ισχύει $f(x)\geqslant f(x_0)\Leftrightarrow f(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$

  Άρα $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$.

  Επομένως το σημείο με τετμημένη x_0 είναι το μοναδικό κοινό σημείο των Cg και Ch.

  Οπότε $g(x_0)=h(x_0)\Leftrightarrow \dfrac{x_0}{e^{x_0}}=\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\qquad(2)$

  Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=(xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)=\dfrac{1-x}{e^x}$

  Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\left(\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right)'=\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\dfrac{x_0}{e}$

  Έχουμε $g'(x_0)=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0}}$ και $h'(x_0)=\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\ln\dfrac{x_0}{e}\overset{(2)}{=\!=}\dfrac{x_0}{e^{x_0}}(\ln x_0-\ln e)$

  $=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}\left(\dfrac{1}{x_0}-1\right)=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}\cdot\dfrac{1-x_0}{x_0}=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0}}$

  Οπότε $g'(x_0)=h'(x_0)$

  Άρα στο μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0 οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4.

Η απόσταση των σημείων $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$ είναι

$d(x)=|f(x)-\varphi(x)|\;=\;f(x)-\varphi(x),\quad x\in(0,+\infty)$

(αφού $f(x)>\varphi(x)$ για κάθε $x>0$)

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

Η συνάρτηση d στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ελάχιστο σ' αυτό, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές