

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ . **Μονάδες 7**
- A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **Μονάδες 4**
- A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Ισχύει  $|\eta\mu x| < |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .
- γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- δ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή,  $M$ , και μια ελάχιστη τιμή,  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . **Μονάδες 3**
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**
- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν. **Μονάδες 9**
- B4.** Να βρείτε:
- (i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 4).
- (ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  (μονάδες 3). **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ , με  $\alpha < -3$ .

- Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  (μονάδες 3). **Μονάδες 6**
- Γ2.** (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  (μονάδες 3).
- (ii) Να βρεθεί το μοναδικό  $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi) = 0$  (μονάδες 3). **Μονάδες 6**
- Γ3.** Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$ . **Μονάδες 6**
- Γ4.** Να δείξετε ότι  $f(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ . **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο  $(1, e)$ . **Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τύπο  $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$ .

- Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ , το  $f(x_0) = 0$ . **Μονάδες 6**
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Έστω η συνάρτηση  $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής, με  $f(x) > \varphi(x)$ , για κάθε  $x > 0$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(x, \varphi(x))$ , με  $x > 0$ . Αν η απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  γίνεται ελάχιστη στο  $x = x_0$ , να δείξετε ότι το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης  $\varphi$ . **Μονάδες 7**