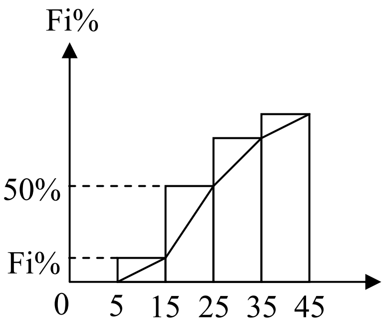
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη σελ. σχολ. βιβλ. 31.
Α2. Ορισμός σελ. σχολ. βιβλ. 148.
Α3. Ορισμός σελ. σχολ. βιβλ. 96.
Α4. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων άρα δ = 25

Β2.

$F_2 = 50\% \Rightarrow f_1\% + f_2\% = 50\%$ και $f_3\% + f_4\% = 50\%$ άρα

$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Rightarrow 4\alpha - 2 = 3\alpha + 6 \Leftrightarrow \alpha = 8$

[..,..)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
ΣΥΝ.		60	100		

Β3.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \nu_i}{\nu} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = \frac{120+360+720+240}{60} = \frac{1440}{60} = 24$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i}{\nu} = \frac{(10-24)^2\cdot 12 + (20-24)^2\cdot 18 + (30-24)^2\cdot 24 + (40-24)^2\cdot 6}{60} =$$

$$= \frac{2352+288+864+1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84 \Leftrightarrow s = \sqrt{84} \simeq 9{,}17$$

Β4.

Ψάχνουμε το ποσοστό που αντιστοιχεί στο διάστημα [36, 45). Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα οπότε θα ισχύει η αναλογία : $\frac{8}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

$$P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$$

$$P(I)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1} \qquad P(\Gamma\cap I)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$$

Γ1.

$$\lim_{x\to -1}\left[2\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]=\lim_{x\to -1}\left[2\frac{x^2-1}{x\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -1}\left[2\frac{x-1}{x(\sqrt{x^2+3}+2}\right]=2\frac{-1-1}{-1\left(\sqrt{1+3}+2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Άρα $P(\Gamma\cup I)=1$ άρα είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2.

$$P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=$$

$$\frac{3\nu+\cancel{\nu}+2-\cancel{\nu}-1}{\nu^2+1}=\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$P(\Gamma\cup I)=1\Leftrightarrow\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}=1\Leftrightarrow 3\nu+\cancel{1}=\nu^2+\cancel{1}\Leftrightarrow\nu^2=3\nu\Leftrightarrow\nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu=0,\ \text{απορρίπτεται}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nu=3}$$

Γ3.

$$P(\Gamma)=\frac{9}{10},\ P(I)=\frac{5}{10},\ P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10}$$

$$P\left[(\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)\right]=P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I)=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-\frac{8}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4.

$$\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow\frac{32}{N(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$$

ΘΕΜΑ Δ

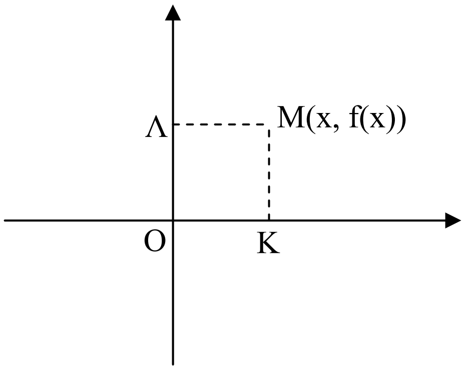
Δ1.

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{-\ln^2 x+2\ln x-1}{x^2}=-\frac{\left(\ln x-1\right)^2}{x^2}\le 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Δ2.

Έστω g(x) η συνάρτηση του εμβαδού του ΟΚΜΛ



$$E = g(x) = x \cdot f(x) = \cancel{x} \cdot \frac{1+\ln^2 x}{\cancel{x}} = 1 + \ln^2 x \ \text{ με } x > 0$$

$$g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	ΕΛ.	↗

Άρα τι εμβαδό του ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο για x=1 και $f(1) = 1$ δηλαδή όταν γίνει τετράγωνο

Δ3. $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$

$f'(1) = -1$ άρα λ=-1

άρα $y = -x + \beta$

δηλαδή $y_i = -x_i + \beta \Rightarrow \bar{y} = -\bar{x} + \beta = \beta - 10$

και $S_y = S_x = 2$

$$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \ge 20 \Leftrightarrow \beta \ge 30$$

ή

$$\beta - 10 \le -20 \Leftrightarrow \beta \le -10$$

Δ4.

$P(A) < 1, P(A \cap B) < 1, P(A \cup B) < 1$ και στο διάστημα $(0,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Ισχύει ότι: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα

$A \cap B \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A \cap B) \le P(A \cup B)$

$A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A) \le P(A \cup B)$

Επειδή η f γνησίως φθίνουσα για $x \in (0,1)$

$$\left.\begin{aligned} f(P(A \cap B)) &\ge f(P(A \cup B)) \\ f(P(A)) &\ge f(P(A \cup B)) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)} f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$$