

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. 253

Α2. Ορισμός σελ. 191

Α3. Ορισμός σελ. 258

 Α4. $\Sigma, \Sigma, \Lambda, \Lambda, \Lambda$
ΘΕΜΑ Β
B1.

$$(z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$2z\bar{z} + 2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 2 \xleftarrow{|z_1|=|z_2|=1} z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 =$$

$$\stackrel{|z_1|=|z_2|=1}{=} 1 + 1 = 2$$

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

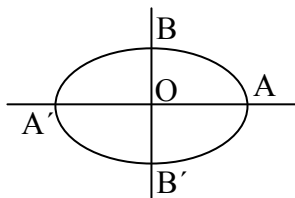
B3.

 Έστω $\omega = x + yi$

$$|\omega - 5\bar{\omega}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{16x^2 + 36y^2} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των ω είναι έλλειψη με $\alpha = 3$ και $\beta = 2$



Η ελάχιστη τιμή του $|\omega|$ θα είναι ίση με το (OB) και η μέγιστη με το (OA)

$$(OB) = \frac{(BB')}{2} = \beta = 2 \text{ και } (OA) = \frac{(AA')}{2} = \alpha = 3 \text{ άρα}$$

$$\boxed{2 \leq |\omega| \leq 3}$$

B4.

$$||z| - 2| \leq ||z| - |\omega|| \leq |z - \omega| \leq |z| + |\omega| \leq |z| + 3$$

$$||z| - 2| = |1 - 2| = 1$$

$$|z| + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\text{Άρα } \boxed{1 \leq |z - \omega| \leq 4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x) = (x-1)\ln x - 1, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

Για $x=1$ έχουμε ότι $f'(1) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει την $x=1$ μοναδική ρίζα. Οπότε :

$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Δηλαδή

| | | | |
|---------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | |

Για $x \in (0, 1]$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{και } f(1) = -1 \text{ άρα } f(A_1) = [-1, +\infty)$$

για $x \in [1, +\infty)$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_2) = [-1, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty)$$

Γ2.

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2012$$

Για $x \in (0, 1]$ το $f(A_1) = [-1, +\infty)$, δηλαδή $2012 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f \searrow)$

$$x_1 \in (0, 1) : f(x_1) = 2012$$

Για $x \in [1, +\infty)$ το $f(A_2) = [-1, +\infty)$, δηλαδή $2012 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f \nearrow)$

$$x_2 \in (1, +\infty) : f(x_2) = 2012$$

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς θετικές ρίζες

Γ3.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x (f(x) - 2012)$

Η g είναι συνεχής στο (x_1, x_2) με $g'(x) = (f'(x) + f(x) - 2012)e^x$

$$\left. \begin{aligned} g(x_1) &= e^{x_1} (f(x_1) - 2012) = e^{x_1} \cdot 0 = 0 \\ g(x_2) &= e^{x_2} (f(x_2) - 2012) = e^{x_2} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2) : g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{x_0} (f'(x_0) + f(x_0) - 2012) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Γ4.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$ άρα $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$ δηλαδή
 $f(x)+1 \geq f(1)+1 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ για $x > 0$ $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E(\Omega) &= \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx = \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx = \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{e^2}{4} - e - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - 1 + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}$$

Δηλαδή $g(x) \geq 0$ για $x > 0$

για $x=1 \Rightarrow g(1)=0$ άρα $g(x) \geq g(1)$ για $x > 0$ δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$.

Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, η g είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από Θεώρημα Fermat : $g'(1) = 0$

$$g'(x) = f(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$$

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e} < 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή

$$f(1) = -\frac{1}{e} < 0, \text{ θα ισχύει } f(x) < 0 \text{ για } x \in (0, +\infty) \text{ δηλαδή } |f(x)| = -f(x)$$

$$\text{Άρα } \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot f(x)$$

Η f συνεχής άρα $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών, άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ παραγωγίσιμη, άρα η f παραγωγίσιμη.

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)$$

$$\text{Θέτω } h(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)} \text{ για } x > 0, \text{ άρα } h(x) = \int_1^x h(t) dt + e$$

$$h'(x) = h(x) \text{ άρα } h(x) = c \cdot e^x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x = 1 \Rightarrow h(1) = e \\ \text{και } h(1) = c \cdot e \end{array} \right\} \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Δηλαδή } h(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x}}$$

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$$

$$\text{Θέτουμε } \frac{1}{f(x)} = u \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x - x} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{(D.H.) u \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{(D.H.) u \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu u}{2} = 0$$

Δ3.

Η f συνεχής άρα $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x > 0$ παραγωγίσιμη.

$F'(x) = f(x) < 0$ Η F' παραγωγίσιμη αφού f παραγωγίσιμη.

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - (\ln x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x + x - 1}{e^x}$$

Επειδή $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow (x - 1) - \ln x \geq 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ άρα $F''(x) > 0$ δηλαδή η F είναι κυρτή.

F συνεχής στο $[x, 2x]$

F παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$

$$\text{Άρα από } \Theta.M.T. \text{ υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_1 \in (x, 2x) : F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

F συνεχής στο $[2x, 3x]$

F παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$

$$\text{Άρα από } \Theta.M.T. \text{ υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_2 \in (2x, 3x) : F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

F κυρτή άρα F' είναι γνησίως αύξουσα. Ισχύει ότι : $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$ άρα

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2F(2x) < F(3x) + F(x)$$

Δ4.

$$\text{Θέτω } g(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$$

g συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$

$$g(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$$

$\beta > 0$ άρα $\beta < 3\beta$ και $F''(x) = f(x) < 0$ δηλαδή F γνησίως φθίνουσα

$$F(\beta) > F(3\beta) \text{ άρα } g(\beta) > 0$$

$$g(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) \stackrel{\Delta^3}{\Leftrightarrow} g(2\beta) < 0 \text{ άρα } g(\beta) \cdot g(2\beta) < 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta) : g(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$

$g'(x) = 2F'(x) < 0$ για $x > 0$, άρα g' γνησίως φθίνουσα, άρα ξ μοναδικό.