

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Να λυθούν οι εξισώσεις και οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$$

$$\beta) \frac{x+\frac{2}{3}}{4} - \frac{\frac{3x}{2}+1}{3} - x = \frac{3-15x}{12}$$

$$\gamma) 6 - \frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4}$$

$$\delta) x - \frac{5}{4} = 2x - \frac{1}{4}$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) \frac{x+\frac{2}{3}}{4} - \frac{\frac{3x}{2}+1}{3} - x = \frac{3-15x}{12}$ $\beta) \frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0$

3. Για ποιες τιμές του λ οι εξισώσεις είναι αδύνατες; $\alpha) (2\lambda-1)x = 2$ $\beta) 3(5\lambda+1)x = -8$.

4. Να προσδιορίσετε το λ, ώστε η εξίσωση $\frac{(5\lambda+3)x}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2(x+1)}{3}$ να είναι αδύνατη.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις : $\alpha) \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = 6 - \frac{1}{4}$ $\beta) \frac{2-x}{3} + \frac{x-7}{2} - 2x = 2x+6x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

6. Να βρεθεί ο αριθμός που το διπλάσιο του αυξημένο κατά 3 ισούται με το μισό του ελαττωμένο κατά 6.

7. Ένας μαθητής είναι 14 ετών και ο καθηγητής είναι 40 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του καθηγητή θα είναι διπλάσια από την ηλικία του μαθητή;

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι διπλάσια της Α και η γωνία Γ είναι τριπλάσια της Β. Να βρεθούν οι γωνίες (σε μοίρες) του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνονται: $\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$, $\gamma = \sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ είναι ορθογώνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

10. Να βρείτε τις τιμές λ, μ ώστε η ευθεία $y = (\lambda+4)x - \mu$, να έχει κλίση 2 και να διέρχεται από το σημείο Α(2,1).

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την ευθεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

11. Θα μοιραστούν 640€ σε 3 οικογένειες ανάλογα με τα παιδιά που έχει η καθεμιά. Η πρώτη έχει 4 παιδιά, η άλλη 5 και η τρίτη 7. Πόσα χρήματα θα πάρει η κάθε οικογένεια;

12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + 1$ περνάει από το σημείο $M(-1, 3)$.

α) Να βρείτε το a .

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

x	0	-1	2
y	0	4	

13. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x - 7$ και $y = -3x + 8$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $y = -ax$ και το σημείο $A(2, 3)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να βρείτε το a .

15. Να γίνει η γραφική παράσταση της $\psi = -x - 2$ α) αν το x πραγματικός
β) αν το $1 \leq x \leq 3$.

16. Να βρεθεί αν τα ποσά που παριστάνονται από τους πίνακες είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	-4	2	-20	5	-10
$\psi = f(x)$	-5	10	-1	-4	-2

17. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που παριστάνει τις αντίστοιχες τιμές δυο ποσών. Να εξετάσετε αν τα ποσά είναι ανάλογα.

x	2	4	2,5	5
$\psi = f(x)$	5	10	1	2

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

18. Ρόμβος έχει περίμετρο 60 cm και η διαγώνιος ΑΓ είναι 24 cm. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

19. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΔ είναι 12 cm και η περίμετρος 56 cm. Να βρεθεί: το εμβαδόν του ΑΒΓΔ και η απόσταση του Δ από τη διαγώνιο ΑΓ.

20. Να βρεθεί το είδος των τριγώνων που έχουν πλευρές :

α) $\alpha = 5$, $\beta = 7$, $\gamma = 8$ cm

β) $\alpha = 12$, $\beta = 13$, $\gamma = 5$ cm

γ) $\alpha = 9$, $\beta = 10$, $\gamma = 15$ cm

δ) $\alpha = 8$, $\beta = 7$, $\gamma = 10$ cm

ε) $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$ cm.

21. Τραπεζίο έχει βάσεις 27 m και 63 m. Το ύψος του ισούται με μια κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου η υποτείνουσα, ισούται με 26 m και η άλλη κάθετος είναι 10 m. Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου.

22. Ισοσκελές τρίγωνο κορυφής Α έχει πλευρά $AB = 15$ cm και τη $BΓ = 24$ cm. Να βρεθεί το ύψος και το εμβαδόν του τριγώνου.

23. Ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ είναι 3 cm και η ΒΓ = 5 cm . Να βρεθεί το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Ποια είναι η ορθή γωνία του;
24. Τραπεζίου ΑΒΓΔ το εμβαδόν είναι 96 cm², το ύψος του 8 cm και η μία βάση διπλάσια από την άλλη. Να βρείτε τις βάσεις του.
25. Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου έχουν άθροισμα 51 και η μια είναι 5/12 της άλλης. Να βρείτε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.
26. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = \frac{7x+3}{2}$, $AG = \frac{10x+9}{3}$ και $BΓ = x+2$.

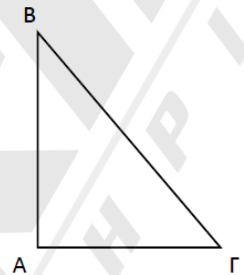
Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 30 cm,

Α) Να βρείτε το x.

Β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Γ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Δ) Να βρείτε το εμβαδόν του.



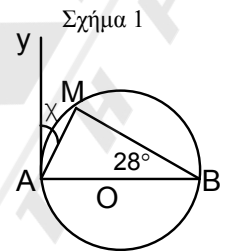
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

27. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να δείξετε ότι ισχύουν: α) $\sin^2 B + \sin^2 \Gamma = 1$
β) $\epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma = 1$.
28. Να δείξετε ότι ισχύει : $\left(\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \sigma\upsilon\nu\omega\right) = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$ όπου ω οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου.
29. Τρίγωνο ορθογώνιο στη γωνία Α έχει $AB = 10$ cm και $\epsilon\phi \Gamma = 0,8$. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.
30. Να αποδειχθεί ότι : $\sin^2 \omega - \eta\mu^2 \omega = 1 - 2\eta\mu^2 \omega = 2\sigma\upsilon\nu^2 \omega - 1$.
31. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 12$ cm και $\eta\mu \Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Να υπολογιστούν οι υπόλοιπες πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου καθώς και το εμβαδόν του.
32. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: α) $\eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ - 3\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ$
β) $2\eta\mu^2 60^\circ - 4\eta\mu^2 30^\circ + \epsilon\phi^2 60^\circ$.
33. Ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι 17 cm και η κάθετη πλευρά ΑΒ είναι 15 cm . Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.

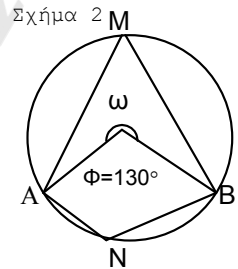
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

34. Ποιο είναι το εμβαδόν κύκλου, αν ξέρετε ότι το μήκος του, είναι ίσο με την περίμετρο τετραγώνου πλευράς 6,28 cm.
35. Να κατασκευάσετε μέσα σε ένα κύκλο ακτίνας 3 cm, ένα κανονικό εξάγωνο . Να βρείτε την κεντρική γωνία, την περίμετρο και τις ίσες γωνίες φ του εξαγώνου.

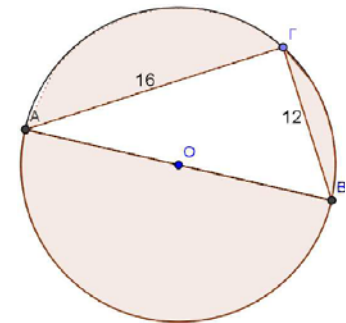
36. Σε κύκλο (O, ρ) να πάρετε διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 100^\circ$, $\widehat{BG} = 70^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε: α) τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ β) τις γωνίες που σχηματίζουν οι διαγώνιές του.
37. Σε κύκλο (O, ρ) να γράψετε δύο παράλληλες χορδές AB και $\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα άκρα των χορδών είναι ισοσκελές τραπέζιο.
38. Να γράψετε κύκλο (O, ρ) και μια ακτίνα OA . Να φέρετε τη μεσοκάθετη της OA , που τέμνει τον κύκλο στα B και Γ . Να δείξετε ότι $\text{BO}\Gamma = 120^\circ$.
39. Στο σχήμα (1) η ημιευθεία Ay είναι εφαπτομένη του κύκλου. Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{MAy} = x$.



40. Στο σχήμα (2) να υπολογίσετε τις γωνίες AMB και ANB .
41. Σε κανονικό n -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο $(0, 4 \text{ cm})$, η απόσταση του κέντρου από την πλευρά του είναι $2\sqrt{3} \text{ cm}$.
α) Να υπολογίσετε την πλευρά του n -γώνου
β) Ποιο είναι το n -γωνο;



42. Αν ο κύκλος (O, ρ) έχει μήκος $25,12 \text{ cm}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του.
43. Στο διπλανό σχήμα δίνεται $\text{AG} = 16$ και $\text{BG} = 12$, όπου AB είναι η διάμετρος του κύκλου (O, ρ) . Να βρεθεί:
Α) Το μήκος AB .
Β) Το μήκος του κύκλου.
Γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
Δ) Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

44. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι $41,7 \text{ cm}^2$ και η γενέτειρά του $\lambda = 5 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του αφού πρώτα βρείτε το ύψος και την ακτίνα του.
45. Τριγωνικού πρίσματος η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $a = 20 \text{ cm}$ και μια κάθετη πλευρά 16 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 40 cm , να υπολογίσετε :
- Την παράπλευρη επιφάνειά του.
 - Την ολική επιφάνειά του.
 - Τον όγκο του.

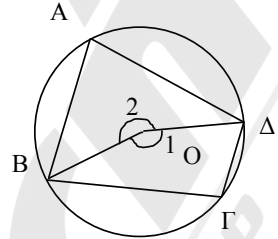
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Οι κορυφές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι σημεία ενός κύκλου (εγγεγραμμένο τετράπλευρο). Να αποδείξετε ότι οι απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές.

Λύση: Αρκεί να αποδείξουμε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$
Φέρνουμε τις ΟΒ και ΟΔ. Παρατηρούμε ότι : $\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}_1$ και

$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\hat{O}_2$. Όμως $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 360^\circ$. Άρα

$\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\hat{O}_1 + \frac{1}{2}\hat{O}_2 = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$. Ομοίως και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$.



2. Αν υ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι ισχύει: $υ = α \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu B$.

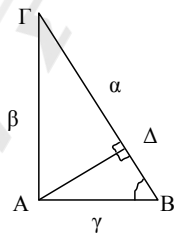
Λύση: Έστω $ΑΔ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΔ = υ$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε :

$$\eta\mu B = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \eta\mu B = \frac{υ}{\gamma} \Rightarrow υ = \gamma \cdot \eta\mu B \quad (1)$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \sigma\upsilon\nu B \quad (2)$$

Λόγω της ισότητας (2) η (1) γράφεται : $υ = \alpha \sigma\upsilon\nu B \eta\mu B$



3. Σε κύκλο (0,3 cm) είναι $\hat{ΑΟΒ} = 120^\circ$ και $ΑΒ = 8 \text{ cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του γραμμοσκιασμένου μέρους. Δίνεται : $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Λύση: Για να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν Ε, πρέπει από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

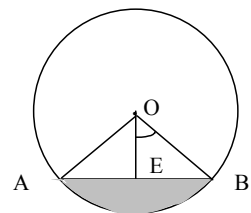
$$E_{\kappa.\tau} = \frac{\pi r^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 9,42 \text{ cm}^2. \quad E_{\text{τριγ.}} = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΟΕ$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το ΟΕ. Παρατηρούμε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ, η ΟΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΒ έχουμε : $\sigma\upsilon\nu \frac{\omega}{2} = \frac{ΟΕ}{ΟΒ} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{ΟΕ}{3} \Rightarrow ΟΕ = 1,5 \text{ cm}$

$$\text{Άρα } E_{\text{τριγ.}} = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΟΕ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm}^2$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = E_{\kappa.\tau} - E_{\text{τριγ.}} = 3,42 \text{ cm}^2$.



4. Να γράψετε το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ σε συνάρτηση με το μήκος Γ του κύκλου.

Λύση: Το μήκος Γ του κύκλου ακτίνας ρ είναι : $\Gamma = 2\pi\rho$ (1). Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ είναι : $E = \pi \cdot \rho^2$ (2). Θα πρέπει να λύσουμε την (1) ως προς το ρ .

$$\text{Έχουμε : } \Gamma = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$\text{Οπότε η (2) γράφεται : } E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} = \frac{\Gamma^2}{4\pi}. \text{ Άρα } E = \frac{\Gamma^2}{4\pi}.$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗ ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^ο

Θέμα 1

Να αναφέρετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$.

Θέμα 2

Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και πώς την συμβολίζουμε;

Θέμα 3

Ένα τετράγωνο κι ένα τραπέζιο έχουν ίσα εμβαδά. Αν οι βάσεις του τραπέζιου είναι 10 cm και 14cm και το ύψος του είναι 3cm να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του τετραγώνου και β) Το μήκος της κάθε πλευράς του τετραγώνου.

Θέμα 4

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\eta\mu 30^\circ - 2\epsilon\phi 45^\circ + \eta\mu^2 45^\circ$$

Θέμα 5

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6}.$$

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

Σχολικό βιβλίο σελ. 127-128.

Θέμα 2

Σχολικό βιβλίο σελ. 41-42.

Θέμα 3

A) Αφού το τετράγωνο και το τραπέζιο έχουν ίσα εμβαδά, αρκεί να βρούμε το εμβαδόν του τραπεζίου από τον τύπο $E_{\text{τραπ.}} = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2}$. Έτσι με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$E_{\text{τραπ.}} = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(10 + 14) \cdot 3}{2} = \frac{24 \cdot 3}{2} = 36 \text{ cm}^2. \text{ Άρα και το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι:}$$

$$E_{\text{τετρ.}} = 36 \text{ cm}^2.$$

B) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $E_{\text{τετρ.}} = x^2$, όπου x είναι το μήκος της κάθε πλευράς του τετραγώνου. Στο πρώτο ερώτημα βρήκαμε ότι $E_{\text{τετρ.}} = 36 \text{ cm}^2$. Άρα θα πρέπει: $x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} \Leftrightarrow x = 6 \text{ cm}$. Άρα η κάθε πλευρά του τετραγώνου είναι 6 cm.

Θέμα 4

$$A = \eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\eta\mu 30^\circ - 2\epsilon\phi 45^\circ + \eta\mu^2 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 2 + \frac{1}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Θέμα 5

$$\frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{3-5x}{3} = 6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{13x}{6} \Leftrightarrow$$

$$2(3-5x) = 3(x-1) - 13x \Leftrightarrow 6-10x = 3x-3-13x \Leftrightarrow$$

$$-10x+13x-3x = -3-6 \Leftrightarrow 0x = -9 \Leftrightarrow \text{Αδύνατη}$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2°

Θέμα 1

A) Τι ονομάζεται επίκεντρη και τι εγγεγραμμένη γωνία και ποια η σχέση της καθεμιάς με το τόξο στο οποίο βαίνει; Ποια η σχέση ανάμεσα σε μια επίκεντρη και μια εγγεγραμμένη γωνία που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα;

B) Ποιοι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°;

Θέμα 2

A) Να δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης. Τι ονομάζεται λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης;

B) Τι ονομάζουμε κανονικό πολύγωνο; Πώς υπολογίζεται η κεντρική γωνία ω και πώς η γωνία φ ενός κανονικού πολυγώνου;

Θέμα 3

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων και να παρασταθούν γραφικά στον άξονα:

$$\frac{3x + 1}{4} - 1 > \frac{4 - x}{3} \quad \text{και} \quad 6 - \frac{x - 2}{3} > \frac{x - 1}{2} - \frac{x - 3}{4}$$

Θέμα 4

Σ' ένα σύστημα αξόνων να πάρετε τα σημεία A(1,5), B(-2,1) και Γ(4,1).

A) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

B) Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Θέμα 5

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου. Δίνεται ότι MA = 4 cm και MB = 3 cm.

